

# 渐开线直齿圆柱齿轮齿根最小曲率半径研究

余震,熊兴波,王永红

(中国航发湖南动力机械研究所,湖南 株洲 412002)

**摘要:**针对圆柱齿轮的齿根过渡曲线建模较为困难的问题,采用圆柱齿轮展成法加工原理与三心定理相结合的研究方法,推导出圆柱齿轮齿根过渡曲线上各点曲率半径的计算公式。在该公式的基础上,分析多个参数对曲率半径的影响规律,为齿根过渡曲线最小曲率半径的选择和设计提供参考。

**关键词:**渐开线齿轮;三心定理;曲率半径;齿根过渡曲线

**中图分类号:**TH132.413 **文献标志码:**B **文章编号:**1671-5276(2019)05-0064-03

## Study of Minimum Curvature Radius of Teeth Root of Involute Spur Gear

YU Zhen, XIONG Xingbo, WANG Yonghong

(AVIC Aviation Powerplant Research Institute, Zhuzhou 412002, China)

**Abstract:** The cylindrical gear generating machining principle is used with the triple heart theorem to establish the model of the teeth transition curve of the cylindrical gear and obtain the calculation formula of the curvature radius of its each point. And the influence of multiple parameters on the curvature radius is analyzed based on the formulation. The reference is provided for the selection and design of the minimum curvature radius of the teeth root transition curve.

**Keywords:** involute gear; triple heart theorem; curvature radius; teeth root transition curve

## 0 引言

齿轮传动具有传动平稳、互换性好、易于变位等优点,是机械传动中最为广泛的传动形式。直齿圆柱齿轮具有结构简单,经济性好,且不受轴向力等优点,是航空传动系统中应用最为广泛的一种齿轮形式。

齿轮的强度分析是齿轮传动设计中最重要的一环,对于弯曲强度计算,国际现有的 ISO 标准及 AGMA 标准均认为,齿根弯曲危险截面位于齿轮齿根过渡曲线处<sup>[1-2]</sup>,该处的曲率半径对齿根弯曲应力影响很大;蔡登峰等采用 Simulation 对直齿圆柱齿轮齿根应力进行了分析,给出了“直齿圆柱齿轮齿根应力最大点位于过渡曲线”的结论<sup>[3]</sup>;黄利银等基于双圆弧齿轮齿廓数学模型,构建了双圆弧齿轮齿根过渡曲线曲率半径的计算公式,得出“双圆弧齿轮齿根应力随过渡曲线曲率半径增大而减小”的结论<sup>[4]</sup>。

齿轮的过渡圆弧对齿轮的强度具有重要的影响,精确建立齿轮的过渡曲线模型,可以显著提高非标准齿轮弯曲强度计算的精度,对保证齿轮在高速重载工况下的安全性具有至关重要的意义。本文将根据圆柱齿轮范成法加工原理,结合三心定理,对精确的齿轮过渡曲线的计算公式进行研究,推导出由范成法加工(刀具为齿条刀)的圆柱齿轮齿根过渡曲线上各点曲率半径的精确计算公式,并对齿轮的齿根过渡最小曲率半径的影响规律进行分析,为齿轮的强度设计提供参考。

## 1 范成法加工齿根过渡曲线

范成法是利用一对齿轮啮合传动原理来加工齿廓和齿根过渡曲线的一种方法,其中一个齿轮作为刀具。当刀具对被切齿轮坯作确定的相对运动时,刀具齿廓就可在与齿轮坯固连的坐标系上切出被加工齿轮轮齿的齿廓,而齿根过渡曲线则由齿条刀齿顶的圆弧段切出。

齿条刀的基本齿形如图 1 所示,其中: $\rho$  为齿条刀刀顶圆角半径, $c^*m$  为顶隙系数, $h_a^*$  为齿条刀齿顶高系数, $m$  为齿条刀模数。

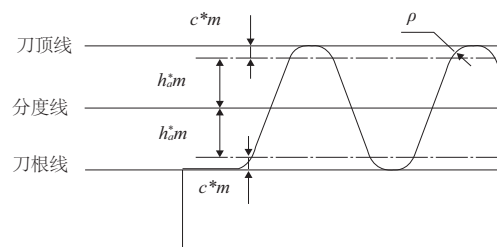


图 1 齿条刀基本齿形

## 2 齿根过渡曲线曲率半径公式推导

### 2.1 运动分析

在加工时,齿条刀以  $v_c$  作匀速直线运动,被加工齿轮

以角速度( $\omega$ )绕齿轮中心点  $O$  作匀速圆周运动,两者相切于点  $K$ ,见图 2。

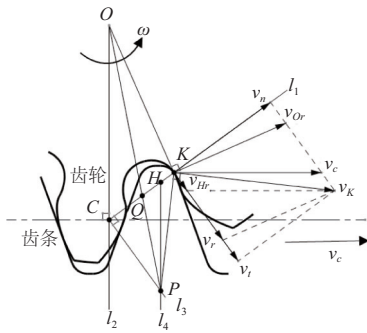


图 2 齿轮齿条刀运动分析

由于齿轮、齿条刀均为刚体,且加工时连续接触,因此两者在法线  $l_1$  方向上相对速度为 0,其相对速度的方向垂直于  $l_1$ 。过点  $O$  作直线  $l_2$  垂直于  $v_c$  方向交  $l_1$  于点  $C$ ,由三心定理可知,点  $C$  为齿轮、齿条刀的相对瞬心,则切点  $K$  的运动可视为绕点  $C$  的圆周运动;因齿轮上点  $C$  的速度恒等于  $v_c$ ,而  $\omega \cdot \overline{OC} = v_c$  ( $\omega$  为齿轮角速度),所以  $\overline{OC}$  为定值, $C$  为定点。

考虑点  $K$  始终在直线  $l_1$  上, $K$  点的绝对速度( $v_k$ )可分解为沿  $l_1$  的法向速度( $v_n$ )及切向速度( $v_t$ )。直线运动  $v_n$  的瞬心在垂直于  $l_1$  方向上, $v_t$  瞬心为点  $C$ ,根据三心定理, $v_k$  的瞬心在过点  $C$  且垂直于  $l_1$  的直线  $l_3$  上。

点  $K$  始终在齿条刀上, $v_k$  可分解为齿条刀的速度  $v_c$  及点  $K$  相对齿条刀的速度  $v_{kr}$ ,其中  $v_{kr}$  为绕点  $H$  (齿条刀齿顶圆心)的圆周运动。根据三心定理, $v_k$  的瞬心必定在垂直于  $v_c$  且过  $H$  点的直线  $l_4$  上,因此  $l_3$  与  $l_4$  交点  $P$  为  $v_k$  的瞬心。

考虑  $K$  点始终在齿轮上, $v_k$  可分解点  $K$  随齿轮绕  $O$  点的圆周运动速度  $v_{ok}$  及点  $K$  相对于齿轮的切向速度  $v_r$ 。 $v_{ok}$  的瞬心为点  $O$ , $v_r$  的瞬心点  $Q$  在垂直于  $v_r$  方向的直线  $l_1$  上。因点  $P$  为  $v_k$  的瞬心,连接点  $O$ 、 $P$ ,根据三心定理, $OP$  与  $l_1$  的交点即为点  $Q$ 。

## 2.2 曲率半径公式推导

由以上分析可知,点  $Q$  为点  $K$  相对于齿轮的切向速度( $v_r$ )的瞬心,因此  $\overline{QK}$  为齿轮在点  $K$  的曲率半径( $\rho_k$ )。几何关系分析如图 3 所示。

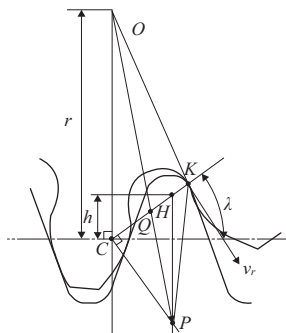


图 3 几何关系分析

由图 3 中可知:

$$\rho_k = \rho_0 + \frac{h}{\sin \lambda} \cdot \frac{\frac{h}{\sin^2 \lambda}}{\frac{h}{\sin^2 \lambda} + r} \quad (1)$$

其中: $\rho_0$  为齿条刀齿顶圆角半径; $r$  为齿轮的分度圆半径; $h$  为齿条刀齿顶圆角中心至节线的距离, $\lambda$  为公法线与齿条运动方向的夹角。

整理可得:

$$\rho_k = \rho_0 + \frac{h}{\sin \lambda} \cdot \frac{h}{h+r \sin^2 \lambda} \quad (2)$$

## 3 齿根曲率半径分析

式(2)中, $h$  随齿条刀中线与节线的距离变化而变化, $\lambda$  随齿轮与齿条刀接触点位置而改变。

当  $\lambda$  取最大值  $90^\circ$  时,齿轮齿根过渡曲线曲率半径有最小值( $\rho_{kmin}$ ),该点在齿根过渡曲线靠近齿根圆的一端。

$$\rho_{kmin} = \rho_0 + \frac{h^2}{h+r} \quad (3)$$

在式(3)的基础上,分析齿数、变位系数等参数对最小曲率半径的影响,其中基本参数如表 1 所示。

表 1 齿轮副主要参数

名称	齿数	模数( $m$ )/ mm	压力角 ( $\alpha$ )/( $^\circ$ )	刀顶圆角半 径( $\rho_0$ )/mm	齿顶高系 数( $h_a^*$ )	变位 系数( $x$ )
值	30	4	20	1	0.25	0

### 3.1 齿数对最小曲率半径影响

随着式(3)中齿数  $Z$  的变化齿轮的最小过渡曲线( $\rho_{kmin}$ )随  $Z$  变化曲线,如图 4 所示。

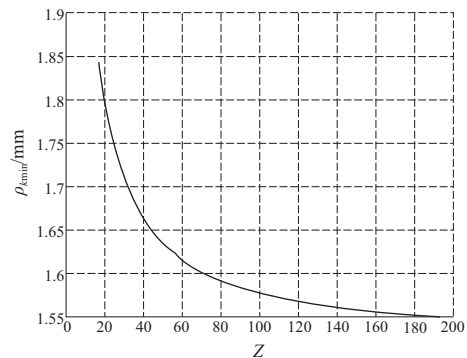


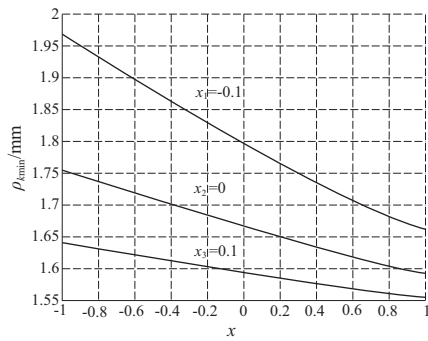
图 4  $\rho_{kmin}$  随  $Z$  变化曲线

由图 4 可知, $\rho_{kmin}$  随  $Z$  增大而减小,减小的趋势逐渐平缓,齿数较少时最小过渡曲线的数值变化比较剧烈,但始终  $> \rho_0$ 。

### 3.2 变位系数对最小曲率半径影响

变位系数  $x$  对齿轮的最小过渡曲线( $\rho_{kmin}$ )随  $x$  变化曲线,如图 5 所示。

由图 5 可知,随着变位系数的增加最小过渡曲线的数值逐渐降低,相对于负变位,正变位系数的齿根最小过渡

图5  $\rho_{kmin}$  随  $x$  变化曲线

曲线减小,因此,在正变位齿轮的设计中应该充分地考虑最小过渡曲线的变化。

### 3.3 压力角对最小曲率半径影响

压力角  $\alpha$  对式(3)中参数  $\rho_0$  和  $h$  具有影响,  $\rho_0$  一方面需保证最小顶隙  $0.25m$ , 另一方面需保证齿条刀有一定齿顶厚,  $\alpha$ 、 $\rho_0$ 、 $h$  三者关系为:

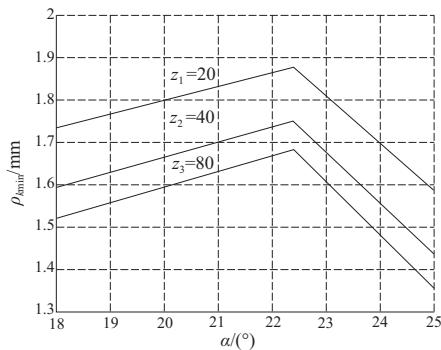
$$\rho_{01} = \frac{0.25m}{1 - \sin\alpha} \quad (4)$$

$$\rho_{02} = \frac{\frac{\pi}{2}m - (0.5 + 2h_a^*)m \tan\alpha}{2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \quad (5)$$

$$\rho_0 = \min(\rho_{01}, \rho_{02}) \quad (6)$$

$$h = (0.25 + h_a^*)m - \rho_0 \quad (7)$$

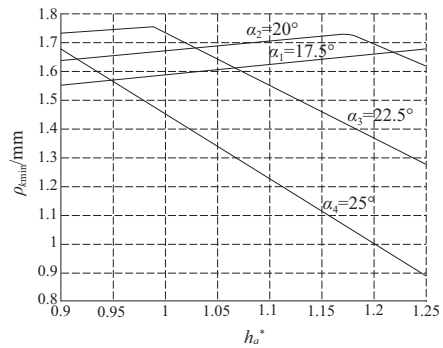
齿轮齿根最小曲率半径 ( $\rho_{kmin}$ ) 随  $\alpha$  变化曲线如图 6 所示。

图6  $\rho_{kmin}$  随  $\alpha$  变化曲线

由图 6 可知,对于不同齿数的齿轮,  $\rho_{kmin}$  先随  $\alpha$  的增大而增大,当  $\alpha$  到一定值时,  $\rho_{kmin}$  达到最大值,之后随着  $\alpha$  的增加,  $\rho_{kmin}$  的数值逐渐降低,降低的梯度要大于在拐点之前的梯度。

### 3.4 齿顶高系数对最小曲率半径影响

随着式(3)中齿顶高系数  $h_a^*$  的变化齿轮的最小过渡曲线 ( $\rho_{kmin}$ ) 随  $Z$  变化曲线,如图 4 所示。

图7  $\rho_{kmin}$  随  $h_a^*$  变化曲线

由图 7 可知,该参数的齿轮对于压力角较小 ( $17.5^\circ$ ) 的齿轮在齿顶高系数  $h_a^* < 1.25$  范围内,  $\rho_{kmin}$  随  $h_a^*$  的增大而增大;而对于压力角为  $20^\circ$ 、 $22.5^\circ$  的齿轮,  $\rho_{kmin}$  先随  $h_a^*$  的增大而增大,但随后受齿顶厚的限制,  $\rho_{kmin}$  反而减小;对于压力角很大 ( $25^\circ$ ) 的齿轮,在  $h_a^* < 1.25$  时,  $\rho_{kmin}$  随  $h_a^*$  的增大而减小。

## 4 结语

针对圆柱齿轮的齿根过渡曲线建模问题,本文采用圆柱齿轮展成法加工原理与三心定理相结合的研究方法,推导出圆柱齿轮齿根过渡曲线上各点曲率半径的计算公式。并就多个参数对最小曲率半径的影响规律进行了研究,为齿轮弯曲强度的精确计算和齿轮强度设计提供参考,结果表明:

- 1) 齿数  $Z$  增大时,齿根过渡曲线最小曲率半径 ( $\rho_{kmin}$ ) 减小,减小的趋势逐渐平缓。
- 2) 对于不同齿数的齿轮,  $\rho_{kmin}$  均随变位系数 ( $x$ ) 增大而减小。
- 3) 对于不同齿数的齿轮,  $\rho_{kmin}$  开始随压力角 ( $\alpha$ ) 的增大而增大,当  $\alpha$  到一定值时,  $\rho_{kmin}$  迅速减小。
- 4) 对于压力角较小 ( $17.5^\circ$ ) 的齿轮,  $\rho_{kmin}$  随齿顶高系数 ( $h_a^*$ ) 的增大而增大;对于压力角较大 ( $20^\circ$ 、 $22.5^\circ$ ) 的齿轮,  $\rho_{kmin}$  先随  $h_a^*$  的增大而增大,但随后受齿顶厚的限制,  $\rho_{kmin}$  反而减小;对于压力角很大 ( $25^\circ$ ) 的齿轮,  $\rho_{kmin}$  随  $h_a^*$  的增大而减小。

### 参考文献:

- [1] ANSI-AGMA 2001-D04. Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and helical gear[S].
- [2] ISO 6336-2006. Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears[S].
- [3] 蔡登峰,曾德基,刘江坤,等. 基于 simulation 的直齿圆柱齿轮齿根应力分析[J]. 煤矿机械,2013,34(3):267-269.
- [4] 黄利银,李金莲. 双圆弧齿轮齿根曲率半径对齿根应力的影响[J]. 机械设计与研究,2011,27(3):56-59,63.

收稿日期:2018-04-26