

# 基于工作空间密度函数的机械臂尺寸优化算法

东辉,吴文滔,孙浩

(福州大学 机械工程及自动化学院,福建 福州 350000)

**摘要:**针对冗余机械臂的自由度多,结构复杂,用传统的方法来求解运算量比较大,获得工作空间比较困难的问题,提出以机械臂结构参数为基础构建的工作空间密度函数数学模型来获得工作空间。工作空间密度函数的最大值的分布区域作为机械臂工作灵活区域的衡量标准进行机械臂尺寸优化。通过算例说明,该方法可以有效地描述机械臂工作空间尺寸及机构灵巧性。

**关键词:**工作空间密度函数;尺寸优化;正运动学;灵巧性

**中图分类号:**TP241.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2019)05-0143-04

## Dimension Optimization of Manipulator Based on Workspace Density Function

DONG Hui, WU Wentao, SUN Hao

(The Department of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350000, China)

**Abstract:** Due to multi-degree of freedom and complicated structure of redundant manipulator, if the traditional methods are used to solve for the big kinetic momentum, it is hard to get the workspace. This paper proposes that the workspace density function built based on the structure parameters of the manipulator is used to obtain the workspace. The maximum distribution area of the workspace density function is used as the flexible area of the manipulator operation to optimize its dimension. The calculating method can be used to show the size of its workspace and the dexterity of the manipulator.

**Keywords:** workspace density function; dimension optimization; forward kinematics; dexterity

## 0 引言

工作空间的概念是1975年由B.Roth提出的,是从几何方面讨论操作机的工作性能。操作机工作空间是指操作机正常运行时,末端执行器坐标系的原点能在空间活动的最大范围,或者说机械臂末端可到点在空间占的体积空间,这一空间被称为可达空间或总工作空间。工作空间作为机器人结构优化的重要指标,一直是学者研究的热点问题。经过几十年的发展,机器人工作空间的求解已经有很多成熟的算法。主要分为:几何法、数值法与解析法。几何法:用绘图的方法绘制出机器人的工作空间边界,该方法直观性强,主要应用于简单的机械结构,但受机械结构的影响比较大,不能广泛地应用到通用机构中<sup>[1-3]</sup>。同理也可借助其他三维建模软件对机构进行工作空间研究<sup>[4-5]</sup>。数值法:一种简单便捷的计算方法。但由于该方法计算效率低,常用于确定机构的定性分析。其中蒙特卡洛法就是非常经典的用于求解机器人工作空间的方法<sup>[6]</sup>,是指使用随机数来解决计算概率问题的方法解析法,建立与机器人运动学相关的封闭解的方程组,非线性方程或矩阵来描述机构的工作空间<sup>[7]</sup>。可利用工作空间边界与速度雅可比矩阵的关联关系采用微分几何学的理论来获得奇异曲面<sup>[8]</sup>,再根据优化理论来判断奇异曲面

是否是工作空间的边界,从而获得机构的边界曲面<sup>[9-10]</sup>。

## 1 机械臂的运动模型

根据工程需要,设计要求是在移动平台四周1m的范围内实现操作任务。自由度的分配,为实现工作空间范围内的抓取机械臂需要有1个回转自由度,机械臂末端的机械手可以灵活抓取需分配1个回转自由度,为使整体机械臂在任一平面实现高灵活性及避障性,至少需要分配3个平面转动自由度,机械臂在任一平面内为平面冗余机械臂。设计初定为5自由度冗余机械臂,冗余机械臂结构模型如图1所示。

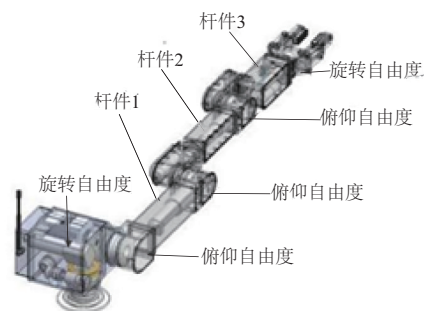


图1 冗余机械臂的结构模型

**基金项目:**国家自然科学基金项目(51605092);福建省科技厅面上项目(2017J01691);福建省教育厅青年项目(JAT160055)

**作者简介:**东辉(1985—),女,吉林白山人,讲师,博士,主要研究方向为机器人运动学求解、控制算法研究及医疗机器人系统。

为完成在空间任一角度位置进行抓取,机械臂由3个杆件和1个末端执行机构组成,机械臂共有5个自由度,其中2个回转自由度,3个平转自由度。由图1可知,杆件1的旋转自由度是将整体机械臂旋转到某个平面内,机械臂在该平面上通过其他3个自由度做平面转动运动进行拾取运动,机械臂末端机械手的旋转自由度只与机械手拾取物体的角度有关,对机械臂整体运动状态并无影响。通过分析可知,可以将机械臂模型做简化处理,简化为平面3R冗余机械臂。图2为简化后的机械臂的坐标系建立。

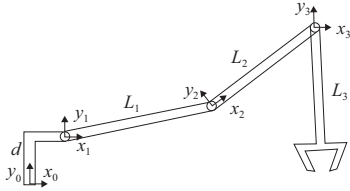


图2 冗余移动机械臂的坐标系建立

## 2 工作空间密度函数的构建

工作空间密度的概念是 Chirikjian 教授提出的<sup>[11]</sup>,是指将机械臂工作空间均匀地划分等尺寸的单元,每个单元内机械臂末端执行器所到达的点数与整体工作空间内点数的比值除以单元面积或体积。一个位置的工作空间密度函数数值的大小可以表示机械臂在该点灵活性的大小,工作空间密度函数值越大证明灵活性越好。工作空间密度不仅能有效地描述机器人工作空间的大小及边界线位置,还能衡量机械臂在工作空间位置中的灵活性。如图2所示,以杆件1为研究对象,以 $x_1, y_1$ 为原点,在笛卡儿坐标系和极坐标系中有 $\theta = \phi_1, r = L_1$ 可得杆件1的工作空间密度方程为:

$$f_1(g) = \frac{\delta(r-L_1)\delta(\theta-\phi_1)}{2\pi r} \quad (1)$$

其中: $\delta$ 为狄拉克函数,是一个广义函数,在物理学中常用其表示质点、点电荷等理想模型的密度分布,该函数在除了固定值以外的点取值都=0,而其在整个定义域上的积分=1。用数学公式表示其定义为:

$$\delta(x-c) = 0 \quad x \neq c; \int_a^b \delta(x-c) dx = 1 \quad a < c < b。$$

由 $\delta$ 函数性质可知,单个杆件的工作空间密度函数 $f_1$ 在其积分区域内积分结果=1,符合工作空间密度函数的定义。式(1)中的 $g$ 为在极坐标系 $(r, \theta)$ 下齐次变换转换矩阵。

$$g(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & r\cos\phi \\ \sin\theta & \cos\theta & r\sin\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

当将1个机械臂分成两部分的时候,如果 $f_1$ 是上半部分的密度函数, $f_2$ 为下半部分的密度函数,则整体密度函数为: $(f_1 \cdot f_2)(g) = \int_C f_1(h)f_2(h^{-1}g)d(h)$ 。

两个函数卷积的傅里叶变换等于这两个函数分别傅里叶变换的乘积。利用该性质将函数卷积运算变为乘积

运算:

$$F(f_1 \cdot f_2) = \int_C \left( \int_C f_2(g)U(g^{-1}, p)U(h^{-1}, p) \right)$$

$$f_1(h)d(h) = F(f_2)F(f_1) = \hat{f}_2(p)\hat{f}_1(p)。$$

对式(1)进行傅里叶变换的矩阵表达式<sup>[11-12]</sup>:

$$\hat{f}_{mn}(p) = \int_C f_1(g)u_{mn}(g^{-1}, p)rdrd\phi d\theta \quad (3)$$

其中: $u_{mn}(g^{-1}, p) = i^{n-m} e^{i[m\theta+(n-m)\phi]} J_{m-n}(pr)$ ,式中: $J_{m-n}(pr)$ 是 $m-n$ 次贝塞尔函数, $i$ 是单位虚数。

将式(1)代入式(3),并应用狄克拉函数性质求工作空间密度函数的傅里叶变换形式可得:

$$\begin{aligned} (\hat{f}_1)_{mn}(p; L_1) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} i^{n-m} e^{ind\phi_1} J_{m-n}(pL_1) d\theta = \\ \delta_{0,n} \frac{1}{2\pi} i^{n-m} J_m(pL_1) \end{aligned} \quad (4)$$

式中: $\delta_{0,n}$ 为克罗内克函数,当 $n=0$ 时该函数值为1, $n \neq 1$ 该函数值为0。根据卷积定理求两个工作空间密度函数的傅里叶变换形式:

$$\begin{aligned} F(f_1 \cdot f_2)_{mk}(p; L_1, L_2) &= \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\hat{f}_1)_{mn}(p; L_1) (\hat{f}_2)_{nk}(p; L_2) &= \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i^{n-m} \delta_{0,n} J_m(pL_1)) (i^{k-n} \delta_{0,k} J_n(pL_2)) &= \end{aligned}$$

$$i^{k-m} J_m(pL_1) J_0(pL_2) \delta_{0,k} = J_0(pL_2) \hat{f}_{mk}(p, L_1)$$

以此类推,可求得杆件数为3时,工作空间密度函数的傅里叶变换形式:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{mn}^3(p) &= J_0(pL_2) J_0(pL_3) \hat{f}_{mn}(p, L_1) = \\ \frac{1}{2\pi} i^{n-m} \delta_{0,n} J_m(pL_1) J_0(pL_2) J_0(pL_3) \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)进行傅里叶反变换就求得杆件数为3时,机械臂的工作空间密度函数

$$f(g) = 2\pi \sum_{n,m \in Z} \hat{f}_{mn}(p) u_{nm}(g, p) p dp \quad (6)$$

其中 $u_{nm}(g, p) = i^{m-n} e^{-i[m\theta+(n-m)\phi]} J_{m-n}(pr)$ 。

则可得其工作空间密度函数

$$\begin{aligned} f_4(g, L_1 L_2 L_3) &= \\ J_0(pL_2) J_0(pL_3) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(pL_1) J_m(pr) e^{-i[m(\theta-\phi)]} \end{aligned} \quad (7)$$

由此类推可得出 $N$ 个杆件的工作空间密度函数

$$f_N(g, L_1 L_2 \cdots L_N) = \prod_{j=1}^{N-1} J_0(pL_j) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(pL_1) J_m(pr) e^{-i[m(\theta-\phi)]} \quad (8)$$

## 3 机械臂尺寸优化

根据实际工程应用的要求,图2中 $d=120$ mm和 $a=90$ mm为固定尺寸不变,其他杆长保持 $L_1 + L_2 + L_3 = 1165$ mm不变进行尺寸优化。根据式(7),杆数 $N=3$ ,杆长取不同数值,关节角变量不受限制时,对工作空间的尺寸及灵活区域进行绘制,结果如图3所示。

根据工作空间密度函数绘制的云图,将重要的参数如

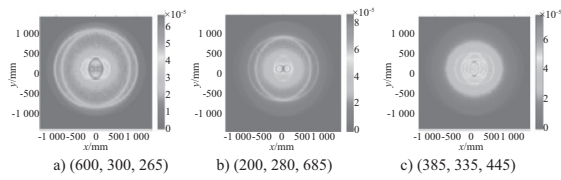


图3 不同参数工作空间密度对比图

工作空间密度函数的最大值、工作空间内空白面积及最大值(灰色)区域分布面积进行对比如表1所示(因本刊系黑白印刷,有疑问处可咨询作者)。

表1 关节角不受限工作空间密度对比数据

云图号	工作空间密度函数最大值	工作空间中间空白单元格数目	最大值单单元格数目
云图 a)	$1.5 \times 10^{-4}$	686	106
云图 b)	$1.3 \times 10^{-4}$	1 456	184
云图 c)	$1.2 \times 10^{-4}$	724	172

机械臂尺寸优化结果的评价标准为工作空间的尺寸及机械臂末端工作灵活区域的分布为评价标准。由于3个杆件的总长度相同,所以由图3的工作空间对比图可知,图3a)-图3c)的最大工作空间相同均为1165mm,但从色彩分布上可以看出机械臂末端灵活工作空间的面积三者相差比较大,图中红色区域表示最灵活区域,深蓝色表示无解区域,随颜色的渐变越靠近蓝色运动学解越少,机械臂灵活性越差。图中的灵活工作空间分布机械臂的正前方,有利于机械臂完成抓取等任务。图3c)的红色区域面积最大,图3b)红色区域面积最小,图3a)工作空间中出现空洞无解区域,工作空间分布的不够理想。根据云图及数据对比表格可知,图3c)的机械臂尺寸结构最优。

出于安全及机械机构设计考虑,对机械臂关节转角进行限位,则机械臂关节转动角度不能实现 $[-\pi, \pi]$ 的随意转动,根据工程需求机械臂转角设计范围为 $\theta_1 = [125^\circ, -45^\circ], \theta_2 = [35^\circ, -135^\circ], \theta_3 = [-40^\circ, 40^\circ]$ 。针对上述关节角范围及不同杆长参数,根据式(7)绘制工作空间密度函数图,如图4所示。

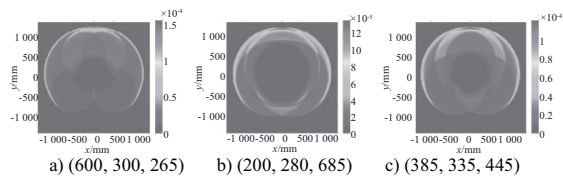


图4 关节角度受限不同参数工作空间密度对比图

表2 关节角受限工作空间密度对比数据

云图号	工作空间密度函数最大值	工作空间中间空白单元格数目	最大值单单元格数目
云图 a)	$6.3 \times 10^{-5}$	146	380
云图 b)	$8.1 \times 10^{-5}$	0	162
云图 c)	$7.2 \times 10^{-5}$	0	268

根据工作空间密度函数绘制的图4,将重要的参数如工作空间密度函数的最大值、工作空间内空白面积及最大值(红色)区域分布面积进行对比如表2所示。

根据工作空间密度函数图进行对比,从灵活工作空间区域(红色区域)面积来说,图4b)的灵活工作空间面积最大,图4a)的灵活工作空间面积最小。但考虑到最大工作空间面积,由于图4b)的中空面积最大,导致最大工作空间面积最小。综合考虑工作空间分布及机械臂末端灵活区域的面积尺寸两方面的因素,图4c)的工作空间密度分布情况比其他两组参数条件下的工作空间密度函数分布情况更好,更加符合实际工作情况。工作灵活区域在远离移动平台的位置,更有利于抓取任务的完成,也避免移动平台接触危险源及恶劣的抓取环境。综上所述,根据工作空间的尺寸及灵活区域的面积及分布,选取 $L_1 = 385 \text{ mm}, L_2 = 335 \text{ mm}, L_3 = 445 \text{ mm}$ 作为设计尺寸,机械臂实物如图5所示。

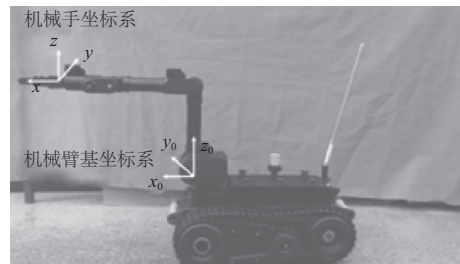


图5 机械臂实物图

## 4 结语

结合高斯函数及极值定理构建平面转动机械臂末端位置的工作空间密度函数,通过与传统的蒙特卡洛法生成的工作空间密度进行对比,证明了数学模型的正确性并且可以有效地描述工作空间的位置及尺寸。结合傅里叶变换及卷积定理,构建1个杆件情况下的特殊形式的工作空间密度函数,推导得出N个杆件时工作空间密度函数的表达式,并针对不同情况,杆长是否相等,关节转角是否受限制等情况,完成了工作空间密度函数表达式的推导,并对推导结果进行了仿真。仿真结果证明:数学模型可以有效地描述不同情况机械臂的工作空间尺寸及大小,并通过工作空间密度最大值的分布情况有效地反映机械臂的灵活区域。从算法的复杂度来进行对比分析,对于N个杆件的机械臂,若每个转动关节的的样本空间大小为M,则蒙特卡洛法的计算复杂度为 $N_M$ ,工作空间密度函数的计算复杂度为 $N \times M$ 。由此可见工作空间密度函数的计算复杂度远小于蒙特卡洛法。随机械臂杆件数的增加工作空间密度函数的优势越明显。以傅里叶函数为基础构建的空间密度函数作为机械臂尺寸优化函数,对冗余移动机械臂的机械臂尺寸进行优化。根据工作空间的尺寸及末端可到达灵活工作空间的分布进行尺寸优化选取。

### 参考文献:

[1] Roth B. Performance evaluation of manipulators from a kinematic viewpoint[J]. NBS Special Publication, 1976, 459:39-62.

- [2] Tsai Y C, Soni A H. Workspace synthesis of 3R, 4R, 5R and 6R robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 1985, 20(6):555-563.
- [3] Ceccarelli M. A synthesis algorithm for three-revolute manipulators by using an algebraic formulation of workspace boundary[J]. Journal of Mechanical Design, 1995, 117(2A):298-302.
- [4] Cao Y, Zang H, Wu L, et al. An engineering oriented method for the three dimensional workspace generation of robot manipulator [J]. Journal of Information and Computational Science, 2011, 8(1):51-61.
- [5] 石磊, 许明恒, 邓维鑫, 等. PoWerCube 模块化机器人工作空间计算[J]. 中国工程机械学报, 2011, 9(1):38-42.
- [7] Lanni C, Saramago S F P, Ceccarelli M. Optimal design of 3R manipulators by using classical techniques and simulated annealing [J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, 2002, 24(4):293-301.
- [8] Kohli D, Hsu M S. The Jacobian analysis of workspaces of mechanical manipulators [J]. Mechanism and Machine Theory, 1987, 22(3):265-275.
- [9] Abdel Malek K, Yeh H J, Othman S. Interior and exterior boundaries to the workspace of mechanical manipulators[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2000, 16(5):365-376.
- [10] Yang J, Abdel Malek K, Zhang Y. On the workspace boundary determination of serial manipulators with non-unilateral constraints[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2008, 24(1):60-76.
- [11] Chirikjian G S, Burdick J W. The kinematics of hyper-redundant robot locomotion [J]. IEEE Transactions on Robotics & Automation, 1995, 11(6):781-793.
- [12] 东辉, 杜志江. 基于工作空间密度函数的平面冗余机器人的逆运动学求解算法[J]. 机械工程学报, 2015, 51(17):8-14.

收稿日期:2018-05-08

(上接第 142 页)

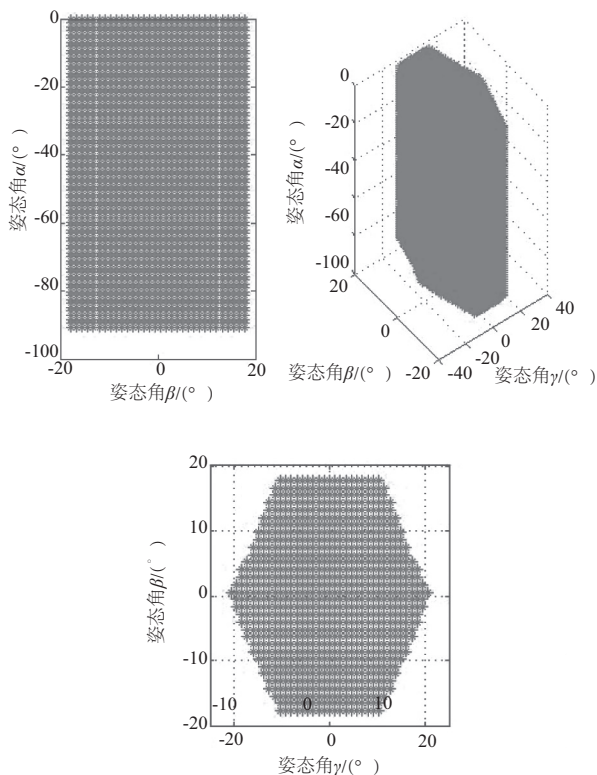


图5 优化后姿态工作空间

### 3 结语

1) 提出一种由气动人工肌肉驱动的仿生肩关节机构,通过解耦可以实现肩关节的3个转动自由度。根据并联机构运动学逆解的易解性,建立了仿生肩关节的运动学模型。

2) 为改善仿生肩关节机构的工作空间,利用遗传算法对机构参数进行优化分析。根据优化后的结构参数,仿生肩关节机构的姿态工作空间明显增大,机构变得紧凑,运动学性能得到改善。

#### 参考文献:

- [1] 侯雷雨, 胡鑫喆, 周玉林. 新型过约束球面并联式关节机构仿生[J]. 中国机械工程, 2014, 25(6):723-730.
- [2] 应申舜, 秦现生, 任振国, 等. 基于人工肌肉的机器人驱动关节设计与研究[J]. 机器人, 2008, 30(2):142-146.
- [3] 李永刚, 宋轶民, 冯志友. 并联机器人机构静刚度研究现状与展望[J]. 机械设计, 2010, 27(3):1-4.
- [4] 吴生富, 王洪波, 黄真. 并联机器人工作空间的研究[J]. 机器人, 1991, 13(3):33-38.
- [5] 陈在礼, 陈学生, 谢涛. 用遗传算法解具有给定工作空间额并联机构综合问题[J]. 中国机械工程, 2002, 13(2):187-189.
- [6] 刘延龙, 金建新, 汪法根. 基于螺旋理论的并联机构构型设计[J]. 中国机械工程, 2003, 14(24):2096-2098.
- [7] 侯雷雨, 汪毅, 范建凯, 等. 3-PSS/S 球面并联肩关节机构优化与仿生设计[J]. 机械工程学报, 2015, 28(1):29-37.

收稿日期:2018-05-14