

双层欧拉梁声子晶体弯曲振动带隙特性研究

涂静,史治宇

(南京航空航天大学 机械结构力学及控制国家重点实验室,江苏 南京 210016)

摘要:为了探究新型低频减振结构,建立局域共振型声子晶体双层欧拉梁简化模型,基于平面波展开法计算其能带结构,通过有限元仿真得到振动传输曲线并验证其带隙特性。结果表明,反对称振动和对称振动能带形成带隙,两能带耦合导致部分非带隙频段仍存在振动衰减,这是单层梁不具备的优势。根据固有振型给出带隙起始、截止频率的计算公式,并研究了弹簧刚度等对带宽的影响。

关键词:双层欧拉梁;平面波展开法;(反)对称弯曲振动;带隙估计;衰减振动

中图分类号:TB535 **文献标志码:**B **文章编号:**1671-5276(2020)02-0069-05

Study on Bandgap Characteristics of Bending Vibration of Double-layer Euler Beam Phononic Crystal

TU Jing, SHI Zhiyu

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: To explore a new type of vibration-reduction structure in low frequency, a simplified model of locally resonant phononic crystal double-layer Euler beam is established. The energy band structure of the beam is calculated based on plane wave expansion method, and the band gap characteristics are verified by the vibration transmission curve obtained by finite element simulation. The results show that the bandgap is formed by the antisymmetric and symmetrical vibration modes, and some attenuation behavior in Non-bandgap bands is caused by the two coupling modes, which is not available for single-layer beam. The formulas for calculating the initial and cut-off frequencies of bandgap are given according to the natural modes, and the effects of spring stiffness on bandwidth are studied.

Keywords: double-layer Euler beam; plane wave expansion method; antisymmetric/symmetric vibration; bandgap estimation; attenuation vibration

0 引言

减振降噪问题一直是学术界和工程界研究重点之一,特别是飞机机翼等很多梁式工业产品均存在不同程度的振动问题,因此对梁结构进行减振研究很有必要。声子晶体概念的提出为结构减振设计和研究指出了新的研究方向。人们发现某些频段内的弹性波在周期弹性复合介质中传播时衰减十分明显,由此提出了声子晶体的概念。Bragg 散射机理和局域共振机理是其带隙产生的两种主要机理,而后者更易通过小尺寸设计实现低频下的减振,因此,研究局域共振型声子晶体梁结构的带隙特性将为低频减振设计和优化提供理论指导。

关于局域共振型声子晶体梁材料性能参数,宿星亮^[1]等人应用平面波展开法研究了功能梯度材料周期分布的声子晶体梁结构的带隙特性以及功能梯度材料性能对带隙的影响。左曙光等人^[2]基于三参数 Maxwell 模型研究了材料粘弹性对单振子声子晶体梁能带结构的影响,发现粘弹性会影响带隙位置和带宽,并减弱振动衰减幅度。

对于声子晶体新型结构的研究最为广泛。张法^[3]和高恩武^[4]研究了角杆、T 型杆等组合型声子晶体结构的带隙特性;王兴国^[5]研究了一维柱壳结构的径向、扭转及轴向剪切振动带隙;蒋娟娜^[6]等人结合有限元法设计并研究了一种新型多重开孔式局域共振声子晶体结构的带隙形成机理和振动特性。对于振子式结构,朱学治等人^[7]提出一种含转动振子的声子晶体梁简化模型,基于传递矩阵法研究其能带结构后指出转动振子可以使得声子晶体梁产生窄频带局域共振带隙和宽频带 Bragg 带隙。文岐华^[8]等人通过传递矩阵法得到双振子欧拉梁的弯曲振动能带结构,并基于 ANSYS 得到的铝-橡胶-铜有限周期梁结构振型图来推测起始、截止频率;李锁斌等人^[9]建立并研究了互置型双振子三组元声子晶体板结构的带隙特性。此外,舒海生等人^[10]在树脂圆柱体上周期布置橡胶和铅同心环构成局域共振型梁结构,并指出声子禁带截止频率由铅块和梁结构的反相弯曲振动决定,而起始频率由铅块无规则振动决定。鉴于纵/横向振动带隙频率范围往往不同步且衰减强度不同,其后来提出角式声子晶体梁^[11]并指出通过弹性波纵/横波的转换,该结构可以使得 3 个方

向上的纵向和弯曲振动都得到明显抑制。

以上文献提出并研究了多种新型声子晶体梁结构,但全部基于单层梁或者组合杆、柱壳结构,尚未有人对双层梁结构及其带隙特性展开深入研究。本文在双梁之间周期布置弹簧和质量块构造出局域共振型声子晶体双层欧拉梁结构,采用平面波展开法对带隙的形成机制和调节规律进行详细研究,给出带隙起始、截止频率的估算公式并给出理论解释,最后与相同参数下的单层梁结构的带隙特性进行了对比。

1 双层欧拉梁模型

双层梁晶胞单元周期排列时,设相邻振子之间的距离(即晶格常数)为 a ,上、下梁的横截面积均为 A ,弹簧刚度系数分别为 k_1, k_2 ,质量块质量为 m ,如图 1 所示。

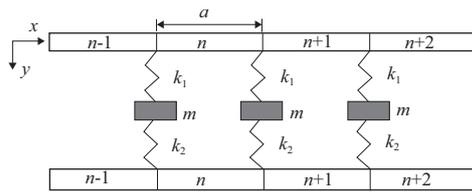


图 1 双层欧拉梁模型示意图

设双层欧拉梁上、下梁的位移场函数分别为 $y_1(x, t)$ 、 $y_2(x, t)$,质量块 m 的位移场函数为 $z(x, t)$,那么双层欧拉梁的振动方程为:

$$\begin{cases} EI \frac{\partial^4 y_1(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_1(x, t)}{\partial t^2} = f_1(x, t) \\ EI \frac{\partial^4 y_2(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_2(x, t)}{\partial t^2} = f_2(x, t) \\ \dots \\ m z(x, t) = k_1 [y_1(x, t) - z(x, t)] + k_2 [y_2(x, t) - z(x, t)] \end{cases} \quad (1)$$

其中 ρ, A, EI 分别代表梁的密度、横截面积、抗弯刚度。

$$f_1(x, t) = -k_1 [y_1(x, t) - z(x, t)] \delta(x-a) \quad (2)$$

$$f_2(x, t) = -k_2 [y_2(x, t) - z(x, t)] \delta(x-a) \quad (3)$$

设 $y_1(x, t) = Y_1(x) e^{-i\omega t}$, $y_2(x, t) = Y_2(x) e^{-i\omega t}$, $z(x, t) = Z(x) e^{-i\omega t}$,根据 Bloch 定理可分解为:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \sum_{G'} Y_1(G') e^{i(k+G') \cdot x}, \\ Y_2(x) &= \sum_{G'} Y_2(G') e^{i(k+G') \cdot x}, \\ Z(x) &= Z(0) e^{ik \cdot x} \end{aligned} \quad (4)$$

将式(2)-式(4)代入式(1)得到

$$\begin{cases} EI(k+G')^4 \sum_{G'} Y_1(G') e^{i(k+G') \cdot x} - \omega^2 \rho A \sum_{G'} Y_1(G') e^{i(k+G') \cdot x} = \\ -\frac{k_1}{a} \sum_{G'} [Y_1(G') - Z(0)] e^{i(k+G') \cdot x} \\ EI(k+G')^4 \sum_{G'} Y_2(G') e^{i(k+G') \cdot x} - \omega^2 \rho A \sum_{G'} Y_2(G') e^{i(k+G') \cdot x} = \\ -\frac{k_2}{a} \sum_{G'} [Y_2(G') - Z(0)] e^{i(k+G') \cdot x} \\ -\omega^2 m Z(0) e^{ik \cdot a} = k_1 \left[\sum_{G'} Y_1(G') - Z(0) \right] e^{ik \cdot a} + \\ k_2 \left[\sum_{G'} Y_2(G') - Z(0) \right] e^{ik \cdot a} \end{cases} \quad (5)$$

将式(5)写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} EI(k+G')^4 + \frac{k_1}{a} & 0 & -\frac{k_1}{a} \\ 0 & EI(k+G')^4 + \frac{k_2}{a} & -\frac{k_2}{a} \\ k_1 & k_2 & -k_1 - k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(G') \\ Y_2(G') \\ Z(0) \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(G') \\ Y_2(G') \\ Z(0) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式(6)为广义特征值问题,其中 k 为第一 Brillouin 区 Bloch 波矢,而 G' 遍历该结构倒格矢空间。通过选取 N 个倒格矢进行计算,那么式(6)变为 $(2N+1) \times (2N+1)$ 阶矩阵特征值求解问题。对于 Brillouin 区内的每个波矢 k ,均可以求出与其对应的特征频率 ω ,从而画出能带结构图。若求出的 ω 存在非零虚部,则说明 ω 处于带隙范围内,即频率为 ω 的弹性波无法在该结构中稳定传播,必然存在衰减。

2 算例

选择铝作为欧拉梁的材料,材料密度等参数如表 1 所示,双层欧拉梁晶胞长度(即晶格常数) a 、梁宽 b 、梁厚 h 等参数如表 2 所示,则梁的横截面积为 $A = bh$,晶胞中梁的质量均为 $m_{\text{梁}} = \rho A a = 0.0364 \text{ kg}$ 。结构中弹簧刚度系数均为 k 。

表 1 梁单元材料属性

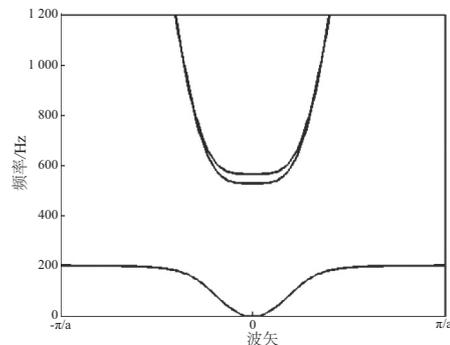
材料	密度 $\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	杨氏模量 E / Pa	剪切模量 μ / Pa
铝	2 600	7×10^{10}	2.7×10^{10}

表 2 声子晶体欧拉梁几何参数

a/m	b/m	h/m	$m_{\text{梁}}/\text{kg}$	$k / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	m/kg
0.07	0.02	0.01	0.364	400 000	0.5

双层欧拉梁能带结构图如图 2 所示。基于 matlab 计算并得到满足表 1 和表 2 参数的双层欧拉梁结构的能带结构,如图 2(a)所示。从图 2(a)可以发现:在 201 Hz ~ 530 Hz 附近存在一条完全带隙。

利用 MSC.Patran 建立双层梁晶胞单元的有限元模型,并求得其特征频率及其对应的固有模态,可以发现截止频率附近存在的两阶固有频率及模态如图 3 所示。



(a) 平面波展开法计算得到能带图

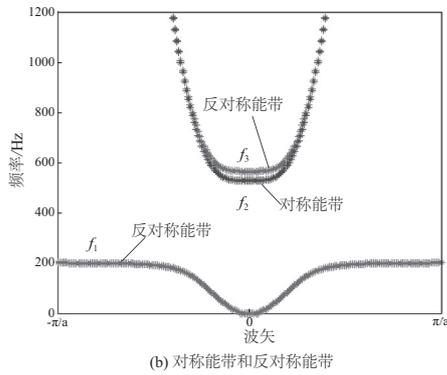


图2 双层欧拉梁能带结构图

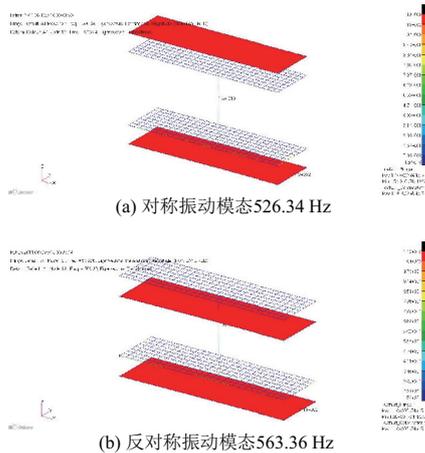


图3 双层欧拉梁晶胞单元固有振型图

根据图3所示截止频率附近的固有模态振型,可以将截止频率附近存在对称弯曲振动和反对称弯曲振动两种模态。因此通过 matlab 编程将能带结构图分成对称弯曲振动能带和反对称弯曲振动能带,如图2(b)所示。

图2(b)表明带隙的形成是由反对称弯曲振动能带和对称弯曲振动能带共同决定的,带隙起始频率由反对称振动模态决定,截止频率由对称振动模态决定。

下面结合图4所示弹簧振子示意图给出带隙起始、截止频率计算公式及推导过程。

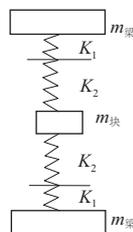


图4 弹簧振子模型示意图

下边界 f_1 对应反对称弯曲振动模式,振动形式为梁静止而振子上下振动,相当于两个相互独立均以梁为基础的弹簧振子模型,因此起始频率就是单弹簧振子系统共振频率,即

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m_{\text{块}}} \quad (7)$$

截止频率 f_2 为对称弯曲振动模式,振动模态显示为质量块静止而梁发生弯曲振动,因此可以看成质量块作为基础而梁作为振动单元,故截止频率

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m_{\text{梁}}} \quad (8)$$

f_3 对应反对称弯曲振动模式能带,这里假设在弹簧的某个中间点固定不动,那么

$$f_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{m_{\text{梁}}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2K_2}{m_{\text{块}}}} \quad (9)$$

弹簧总刚度满足

$$k = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \quad (10)$$

设 $m_{\text{梁}}/m_{\text{块}} = \gamma$, 由式(9)和式(10)可得

$$K_2 = \frac{1+2\gamma}{2\gamma} k \quad (11)$$

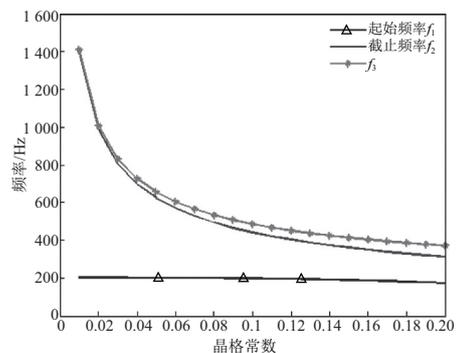
将式(11)代回式(9)即可得

$$f_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_{\text{梁}}} (1+2\gamma)} \quad (12)$$

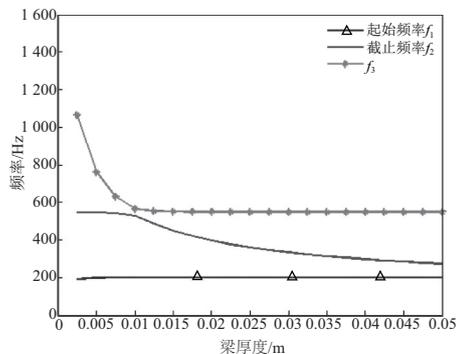
对于双层欧拉梁而言,图2(a)能带结构图显示其带隙起始频率 $f_1 = 201$ Hz,截止频率 $f_2 = 530$ Hz, $f_3 = 565$ Hz,而通过式(7)、式(8)以及式(12)计算得到的起始、截止频率分别为 $f_1 = 201.3$ Hz, $f_2 = 527.6$ Hz, $f_3 = 564.7$ Hz。可以发现这与能带结构图中带隙边界处的频率几乎一致,因此说明式(7)、式(8)以及式(12)估算带隙是准确的。

3 带隙影响规律

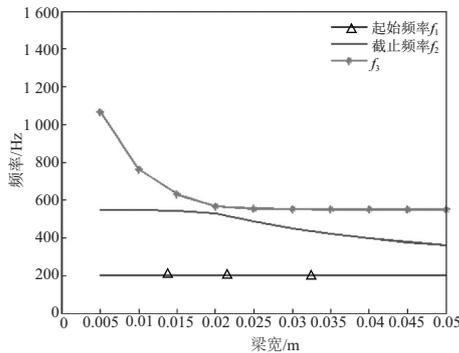
为了研究带隙特性的影响因素,下面研究双层欧拉梁各参数对能带特性的影响,主要参数包括:晶格常数 a , 一侧梁厚度 h , 一侧梁宽度 b , 质量块质量 m 以及弹簧刚度 k , 影响规律分别如图5所示。



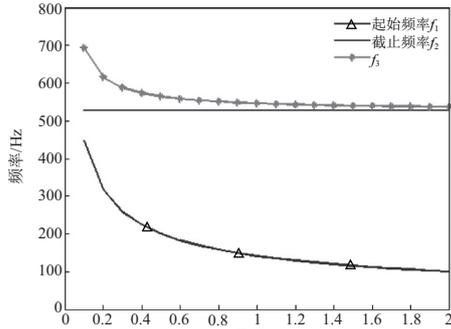
(a) 带隙随晶格常数变化图



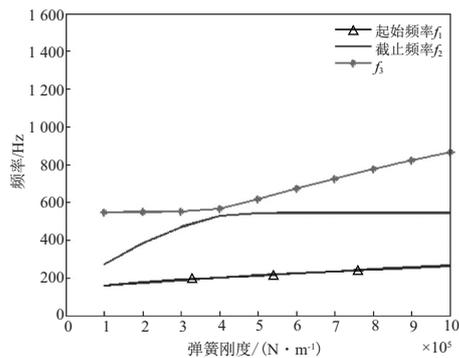
(b) 带隙随一侧梁厚变化图



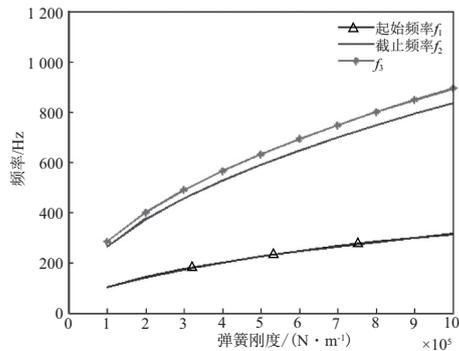
(c) 带隙随一侧梁宽变化图



(d) 带隙随质量块质量变化图



(e) 带隙随一侧弹簧刚度变化图



(f) 带隙随弹簧刚度变化图

图 5 带隙随梁截面、弹簧、质量块变化图

图 5(a)–图 5(c) 显示: 晶格常数增大, 带隙起始频率 f_1 几乎不变, 截止频率 f_2 逐渐减小, 因而带隙逐渐变窄; 改变一侧梁的厚度或者宽度, 发现带隙起始频率 f_1 几乎不变, 截止频率 f_2 逐渐降低, 导致带隙逐渐变窄; 这是由于梁尺寸的变化引起梁质量 $m_{梁}$ 增加, 但并未影响质量块质量, 因此起始频率 $f_1 = 0.5/\pi \cdot (k/m_{块})^{0.5}$ 保持不变, 而 $f_2 =$

$0.5/\pi \cdot (k/m_{梁})^{0.5}$ 减小。

图 5(d) 显示: 随着质量块质量 m 的增加, 带隙起始频率 f_1 逐渐下降, 截止频率 f_2 保持不变, f_3 逐渐降低并与 f_2 接近。引起该变化的原因为: 质量块质量增加, 但梁质量并未改变, 故起始频率 $f_1 = 0.5/\pi \cdot (k/m_{块})^{0.5}$ 逐渐减小, 而截止频率 $f_2 = 0.5/\pi \cdot (k/m_{梁})^{0.5}$ 不变。

通过图 5(e) 发现: 弹簧刚度 k 增加引起带隙起始频率 f_1 逐渐增大, 而截止频率 f_2 先增大后保持不变, f_3 先不变后逐渐增大, 导致带隙先增加后缓慢减小。 k 的增加导致起始频率 $f_1 = 0.5/\pi \cdot (k/m_{块})^{0.5}$ 增大容易理解, 而截止频率 $f_2 = 0.5/\pi \cdot (k/m_{梁})^{0.5}$ 先增大后不变的原因在于: 双层欧拉梁一共有两条梁和两根弹簧, 所以根据式 (8) 截止频率应该也有两个, 最后由两侧计算得到的截止频率结果较小的作为带隙截止频率, 当只改变一侧的弹簧刚度或者梁的厚度宽度, 引起其中一侧截止频率的变化, 而另外一条频带并未发生改变, 只是在作图过程中是按照较低的频率称为 f_2 , 高的频率比称为 f_3 。因此再次做出同时改变两侧弹簧刚度大小引起的带隙变化如图 5(f) 所示, 可以发现弹簧刚度引起起始频率增大, 而截止频率增加更多 (这是由于梁质量比质量块小的缘故), 带宽增大。

利用 MSC/PATRAN 建立 12 个晶胞结构的有限长梁模型, 划分网格后并在梁的左端施加垂直于梁平面的单位位移激励作为初始条件, 如图 6 所示。图中小竖线代表弹簧, 三角形代表集中质量块, 参数分别如表 1 和表 2 所示。



图 6 双层梁有限元仿真模型示意图

分别选择双层欧拉梁的同侧和异侧另一端作为响应点绘制弯曲振动传输曲线, 并与图 2 中双层欧拉梁能带结构图进行比较, 如图 7 所示。

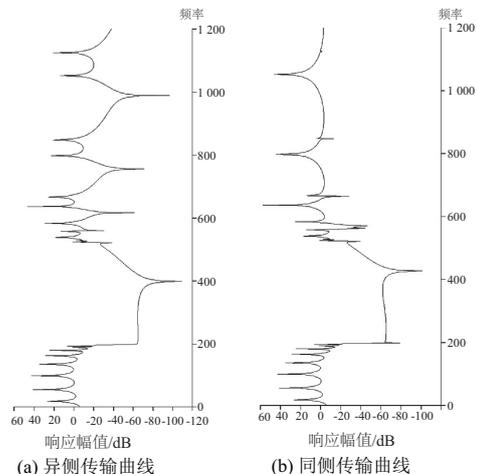


图 7 双层欧拉梁弯曲振动传输曲线图

通过比较图 7(a)和图 7(b)发现,不管响应拾取点位于激励点同侧还是异侧,200 Hz~560 Hz 频率范围内的弯曲振动在双层欧拉梁中传播时均存在很强的衰减,最大衰减幅值可以达到 120 dB,且该频率区间正好与图 2 能带结构图中带隙频率范围重合。

同时图 7(a)与图 7(b)存在一条非常明显的差别:当激励点和响应点位于异侧梁上时,在带隙范围外仍然可能存在较大衰减,而激励点和响应点位于同侧时,振动衰减几乎只存在于带隙范围内。其实,造成这种现象的原因在于:能带结构图中在 526 Hz 和 563 Hz 处存在对称弯曲振动模式和反对称弯曲振动模式对应的能带,两条能带耦合后相互抵消,从而引起图 7(a)异侧梁弯曲振动传输曲线图中弯曲振动在非带隙范围内仍有较大衰减的情况。

为了对比单/双层欧拉梁声子晶体的带隙特性,建立相同参数的单/双层梁声子晶体模型并得到振动传输曲线图,如图 8 所示。

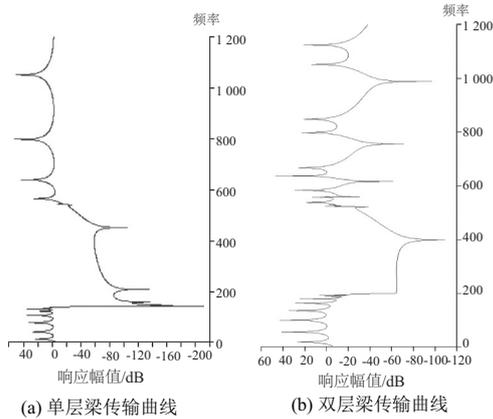


图 8 单/双层欧拉梁振动传输曲线对比图

通过图 8 可知,双层梁相对于单层声子晶体欧拉梁而言,单层梁的衰减幅值约为 60 dB,而双层梁的平均衰减幅值约为 70 dB,二者衰减幅度相近。但是通过对比可以很直观地看到,双层欧拉梁在带隙之外的部分频率范围内仍存在明显的衰减现象,如图 8(b)中 750 Hz 以及 1000 Hz 附近存在的强衰减现象,这是单层梁所不具有的特性。因此双层梁相对于单层梁在衰减振动方面具有特有的优势。

4 结语

本文构造出局域共振型声子晶体双层欧拉梁结构,基于平面波展开法计算其能带结构,并利用有限元法仿真得到相应有限结构的弯曲振动传输曲线,对该结构的带隙特

性展开了详细研究。得到以下主要结论:

1) 声子晶体双层欧拉梁能带结构存在对称与反对称弯曲振动模式,带隙的打开可以认为是共振单元的振动模式和梁的振动模式相互耦合作用的结果。带隙起始频率 $f_1 = 0.5/\pi \cdot (k/m_{块})^{0.5}$ 由反对称弯曲振动模式决定,截止频率 $f_2 = 0.5/\pi \cdot (k/m_{梁})^{0.5}$ 由对称弯曲振动模式决定。

2) 通过减小梁单元截面尺寸、晶格常数,可以降低带隙截止频率从而增大带隙宽度;增加质量块质量,带隙起始频率下降,带隙宽度增大;通过增加弹簧刚度,可以同时增大起始和截止频率且截止频率增加更多,从而带隙宽度增加。所有上述影响规律均可借助于“基底-弹簧-质量块”简化模型得到解释。

3) 双层欧拉梁在非带隙范围内某些频率段仍存在较强的衰减振动的作用,这是由于双层梁存在的两种弯曲振动模式(对称弯曲振动模式和反对称弯曲振动模式)相互叠加抵消的结果,这是单层梁所不具备的,因此双层梁结构在减振方面具有特有的优势。

参考文献:

- [1] 宿星亮,高原文.一维功能梯度材料声子晶体弹性波带隙研究[J]. 功能材料,2010,41(S2):368-370,374.
- [2] 左曙光,韦锡晋,倪天心,等.材料粘弹性对于一维局域共振声子晶体带隙的影响[J]. 功能材料,2016,47(10):10162-10167.
- [3] 张法.声子晶体组合杆振动特性研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学,2013.
- [4] 高恩武.声子晶体组合杆及减振平台的振动特性研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学,2014.
- [5] 王兴国.一维广义声子晶体柱壳振动及隔声特性研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学,2016.
- [6] 蒋丽娜,姚宏,赵静波,等.新型多重开孔式声子晶体低频带隙研究[J]. 压电与声光,2018,40(5):709-714,719.
- [7] 朱学治,陈照波,焦映厚,等.含有周期分布转动振子的声子晶体梁的弯曲振动带隙研究[J]. 振动与冲击,2017,36(21):85-91.
- [8] 文歧华,左曙光,魏欢.多振子梁弯曲振动中的局域共振带隙[J]. 物理学报,2012,61(3):240-246.
- [9] 李锁斌,窦益华,陈天宁,等.声子晶体板中低频宽禁带的形成机理[J]. 西安:西安交通大学学报,2018,52(12):159-166.
- [10] 舒海生,张法,余豪华,等.一类局域共振型声子晶体梁的带隙分析[J]. 哈尔滨工程大学学报,2011,32(9):1249-1253.
- [11] 舒海生,郜冶,张法,等.一种局域共振型角式声子晶体梁[J]. 振动与冲击,2013,32(10):157-161,174.

收稿日期:2019-01-02