

斜齿面齿轮齿面接触问题的有限元-线性规划解法

宋相男,靳广虎

(南京航空航天大学 直升机传动技术实验室,江苏 南京 210016)

摘要:提出了一种基于有限元及线性规划计算斜齿面齿轮齿面接触区域载荷分布及啮合刚度的方法。建立了斜齿面齿轮齿面的数学模型,基于 matlab 实现其齿面及接触轨迹的可视化;基于有限元思想,并结合线性规划改进的单形算法,得到齿面接触区域各点载荷分配;根据接触区域平均变形量和载荷计算了啮合齿对的啮合刚度;计算了接触区域最大压应力,并与 Hertz 理论的计算结果进行对比,验证该线性规划算法的有效性。

关键词:斜齿面齿轮;接触分析;载荷分布;啮合刚度

中图分类号:TH132.41 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2020)02-0017-05

Finite Element-Linear Programming Solution for Helical Face-Gear in Contact

SONG Xiangnan, JIN Guanghu

(National Key Laboratory of Science and Technology on Helicopter Transmission, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: In this paper, a method based on finite element and linear programming for calculating contact stress of helical face-gear is presented. This paper establishes the mathematical model of helical face-gear tooth surface, and realizes the visualization of the tooth surface and contact track based on matlab. Based on the idea of finite element and the improved simplex algorithm of linear programming, the load distribution of each point in the tooth surface contact region is obtained. The meshing stiffness between gear teeth is calculated, based on the average deformation and load at each point in the contact region. Then, the effectiveness of the linear programming algorithm is verified, compared with the result calculated by the Hertz theory.

Keywords: helical face-gear; contact analysis; load distribution; meshing stiffness

0 引言

本质上而言,面齿轮传动是渐开线圆柱齿轮与锥齿轮相啮合的齿轮传动^[1],在直升机主减速器的传动系统、铣床主轴的传动系统以及自行车的无链条传动系统中均有很好的应用。其特有的结构和啮合特性使其具备诸多优势,成为 21 世纪直升机传动系统研究的重点。

LITVIN.F.L 研究了面齿轮齿面成形的理论方法及齿面接触应力的分析^[2-3];沈云波等分析了斜齿面齿轮齿宽限制条件^[4-5];方宗德、WU S H 及 YE.S.Y 等人基于齿轮齿面的柔度矩阵对齿面接触应力进行了计算^[6-9];T.F.Conry 等基于线性规划的思想提出了弹性接触问题的解法^[10-12];唐进元基于有限元的思想计算了螺旋锥齿轮的啮合刚度^[13]。

本文提出基于有限元-线性规划法对斜齿面齿轮齿面接触问题进行计算的方法,基于齿面接触区域的载荷和变形量计算了齿轮副的啮合刚度及最大压应力。

1 斜齿面齿轮的齿面成形及接触轨迹

1.1 齿面数学模型

斜齿面齿轮齿面十分复杂,无法直接将其齿面方程表示出来,需借助其加工刀具齿面方程,并结合齿轮啮合方程间接对其齿面加以描述。

1) 插齿加工坐标系

根据斜齿面齿轮插齿加工原理,建立如图 1 所示加工坐标系。其中, $s_{sc}(o-x_{sc}, y_{sc}, z_{sc})$ 为刀具的固定坐标系, $s_s(o-x_s, y_s, z_s)$ 是与刀具固联的转动坐标系, $s_{fc}(o-x_{fc}, y_{fc}, z_{fc})$ 为面齿轮的固定坐标系, $s_f(o-x_f, y_f, z_f)$ 是与面齿轮固联的转动坐标系, φ_s 和 φ_f 分别为刀具与面齿轮的转角。

2) 刀具的齿面方程

图 2 为刀具端面齿廓及坐标系,该坐标系与图 1 中的坐标系对应。其中, θ_s 为刀具渐开线齿廓上的角度参数; θ_{sc} 为刀具基圆上齿槽宽所对应圆心角之半,其计算公式为

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51475226)

第一作者简介:宋相男(1994—),男,江苏宿迁人,硕士研究生,研究方向为机械传动和结构强度。

$$\theta_{sc} = 2\pi/N_s - (\tan\alpha_{st} - \alpha_{st}) \quad (1)$$

式中: N_s 为刀具齿轮的齿数; α_{st} 表示刀具端面压力角。

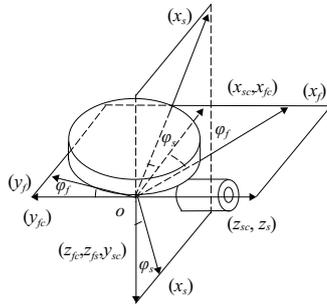


图1 斜齿面齿轮插齿加工坐标系

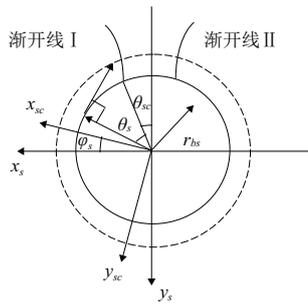


图2 刀具齿面坐标系

渐开线齿廓方程为:

$$\begin{cases} x_s = \pm r_{bs} (\sin(\theta_{sc} + \theta_s) - \theta_s \cos(\theta_{sc} + \theta_s)) \\ y_s = -r_{bs} (\cos(\theta_{sc} + \theta_s) + \theta_s \sin(\theta_{sc} + \theta_s)) \end{cases} \quad (2)$$

式中: r_{bs} 为刀具基圆半径;“±”分别表示渐开线齿廓 I 和 II。

渐开线斜齿轮刀具的齿面由端面齿廓沿 z 轴作螺旋运动扫略形成,故刀具齿面 1(即齿廓 I 螺旋而成的齿面)方程表示为:

$$r_s(\theta_s, \gamma_s) = \begin{bmatrix} r_{bs} [\sin(\theta_{sc} + \theta_s - \gamma_s) - \theta_s \cos(\theta_{sc} + \theta_s - \gamma_s)] \\ -r_{bs} [\cos(\theta_{sc} + \theta_s - \gamma_s) + \theta_s \sin(\theta_{sc} + \theta_s - \gamma_s)] \\ p_s \gamma_s / (2\pi) + L_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

同理,齿面 2 方程为:

$$r_s(\theta_s, \gamma_s) = \begin{bmatrix} -r_{bs} [\sin(\theta_{sc} + \theta_s + \gamma_s) - \theta_s \cos(\theta_{sc} + \theta_s + \gamma_s)] \\ -r_{bs} [\cos(\theta_{sc} + \theta_s + \gamma_s) + \theta_s \sin(\theta_{sc} + \theta_s + \gamma_s)] \\ p_s \gamma_s / (2\pi) + L_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: γ_s 为端面齿廓沿 z 轴螺旋的角度; p_s 为螺旋参数,其计算公式为

$$p_s = 2\pi r_{bs} / \tan\beta_b \quad (5)$$

式中 β_b 为刀具基圆螺旋角。

3) 斜齿面齿轮的齿面方程

根据包络理论和齿轮啮合原理,则得斜齿面齿轮的齿

面方程为:

$$\begin{cases} r_f(\theta_s, \gamma_s, \varphi_s) = M_{f,s} \cdot r_s \\ f(\theta_s, \gamma_s, \varphi_s) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中: $M_{f,s}$ 是坐标系 s_s 到 s_f 的坐标转换矩阵; $f(\theta_s, \gamma_s, \varphi_s)$ 是齿面啮合方程。 $M_{f,s}$ 表示为:

$$M_{f,s} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_f \cos\varphi_s & -\cos\varphi_f \sin\varphi_s & -\sin\varphi_f & 0 \\ -\cos\varphi_s \sin\varphi_f & \sin\varphi_s \sin\varphi_f & -\cos\varphi_f & 0 \\ \sin\varphi_s & \cos\varphi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f = v^{(s,f)} \cdot n$$

其中: $v^{(s,f)}$ 为刀具与面齿轮啮合点处的相对运动速度; n 表示啮合点处法向量。

1.2 齿面啮合轨迹

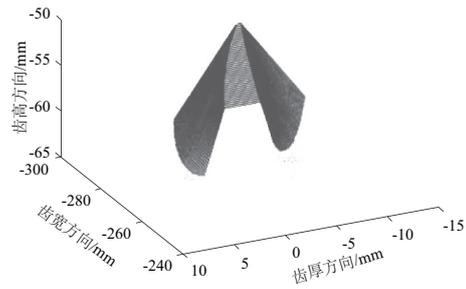
采用齿数 N_1 比刀具齿数 N_s 少 1~3 个,且其他参数与刀具一致的渐开线斜齿圆柱齿轮与面齿轮啮合,实现点接触传动。因齿面参数相同,故斜齿轮齿面方程与刀具相类似,其齿面方程用 $r_1(\theta_1, \gamma_1)$ 表示。

啮合传动时,两轮齿面连续相切,则在固定坐标系中,两轮齿面接触点具有相同的坐标和法向量,即:

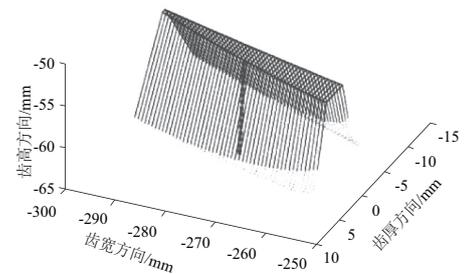
$$\begin{cases} r_1^{lc}(\theta_1, \gamma_1, \varphi_1) = r_f^{lc}(\theta_s, \gamma_s, \varphi_s, \varphi_f) \\ n_1^{lc}(\theta_1, \gamma_1) = n_f^{lc}(\theta_s, \gamma_s, \varphi_s, \varphi_f) \\ f(\theta_s, \gamma_s, \varphi_s) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中: $r_1^{lc}(\theta_1, \gamma_1, \varphi_1)$ 和 $r_f^{lc}(\theta_s, \gamma_s, \varphi_s, \varphi_f)$ 为斜齿轮和面齿轮齿面点在斜齿轮固定坐标系中的坐标; $n_1^{lc}(\theta_1, \gamma_1)$ 和 $n_f^{lc}(\theta_s, \gamma_s, \varphi_s, \varphi_f)$ 为斜齿轮和面齿轮齿面点的法向量在斜齿轮固定坐标系中的表示。

依据上述理论分析,利用 matlab 编写程序,实现斜齿面齿轮齿面及接触轨迹的可视化,如图 3。



(a) 斜齿面齿轮齿面



(b) 齿面接触轨迹

图3 斜齿面齿轮齿面及接触轨迹

$$\begin{cases} -[A] \cdot \{P\} + \delta \cdot \{e\} + [I] \cdot \{Y\} + [I] \cdot \{Z\} = \{H\} \\ \{e\}^T \cdot \{P\} + Z_{n+1} = F \\ P_i \geq 0, \delta \geq 0, Y_i \geq 0, Z_i \geq 0 \end{cases} \quad (21)$$

下,求目标函数

$$Z_0 = \sum_{i=1}^{n+1} Z_i \quad (22)$$

的最小值。

式中: Z_i 为人工变量,其值非负。

该问题不同于一般线性规划问题之处在于其附加有接触条件式(19),将该问题表示如表1所示。

表1 面齿轮弹性接触问题的线性规划表示

P_1	P_2	...	P_n	δ	Y_1	Y_2	...	Y_n	Z_1	Z_2	...	Z_n	Z_{n+1}	
$-A_{11}$	$-A_{12}$...	$-A_{1n}$	1	1	0	...	0	1	0	...	0	0	h_1
$-A_{21}$	$-A_{22}$...	$-A_{2n}$	1	0	1	...	0	0	1	...	0	0	h_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	0	0	\vdots
$-A_{n1}$	$-A_{n2}$...	$-A_{nn}$	1	0	0	...	1	0	0	...	1	0	h_n
1	1	...	1	0	0	0	...	0	0	0	...	0	1	F
0	0	...	0	0	0	0	...	0	1	1	...	1	1	z_0

表1第一行元素为待求的各未知量,往后每行代表一个约束条件,共有 $N+2$ 个约束条件,最右边一列的值为等式约束式(21)的右边常数项。

将表1的第 $N+2$ 约束行元素减去前 $N+1$ 约束行元素之和,并将结果放置于原第 $N+2$ 约束行,获得改进后的形式如表2所示。

表2 面齿轮弹性接触问题的改进线性规划表示

P_1	P_2	...	P_n	δ	Y_1	Y_2	...	Y_n	Z_1	Z_2	...	Z_n	
$-A_{11}$	$-A_{12}$...	$-A_{1n}$	1	1	0	...	0	1	0	...	0	h_1
$-A_{21}$	$-A_{22}$...	$-A_{2n}$	1	0	1	...	0	0	1	...	0	h_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	0	\vdots
$-A_{n1}$	$-A_{n2}$...	$-A_{nn}$	1	0	0	...	1	0	0	...	1	h_n
1	1	...	1	0	0	0	...	0	0	0	...	0	F
d_1	d_2	...	d_n	d_{n+1}	d_{n+2}	d_{n+3}	...	d_{2n+1}	0	0	...	0	Z_d

表2中, d_i, Z_d 可分别表示为:

$$d_i = \begin{cases} -1 + \sum_j^n A_{ji} & i = 1, 2, \dots, n \\ -n & i = n+1 \\ -1 & i = n+2, n+3, \dots, 2n+1 \end{cases} \quad (23)$$

$$Z_d = Z_0 - F - \sum_i^n h_i$$

由表2可知, Z_i 的系数矩阵为一单位阵,故令 Z_i 为基变量,令 (P, δ, Y) 为非基变量,取值为0,得初始基本可行解。因未知量数远大于方程数,故有多组基本可行解,但仅有一组为所需解。由线性规划的求解过程可知,得到一组基本可行解后,需不停地进行转轴运算,使各变量不断进入或退出基变量,找出一组使目标函数取最小值的可行解。

任何一个非基变量 x_s 增加一正增量 Δx_s ,将使目标函数变化为 $Z_d + d_s \Delta x_s$,为使目标函数减小最快,应使 d_s 为 d_i 中的最小负值。找出变量 x_s 所在列的所有正系数 a_{is} ,其对应最右边的常数项为 b_i ,作比值 b_i/a_{is} ,找出所有比值的最小者。假设在 r 行,则以 r 行 s 列元素为转轴元素进行转轴运算。此时,原非基变量 x_s 进入基本可行解,而相应的 Z_r 则退出基本可行解。

用该方法求解斜齿面齿轮的齿面接触问题时,有附加接触条件式(19),故对进入基本可行解的变量有限制条件。假设某次进入基本可行解的变量选为 P_s ,则需检查与之对应的 Y_s 是否为基变量。若否, P_s 可自由进入基本可

行解;若是, P_s 进入后 Y_s 退出,则此次 P_s 仍可进入,否则找出 d_s 中除 d_s 以外的最小负值所在列的变量进入基本可行解;同理,若某次进入基本可行解的变量选为 Y_s ,则应对应的 P_s 进行检查。

重复上述运算过程,直至得到满足接触条件的基本可行解。实际计算表明,在 $2 \times (N+1)$ 个循环内便可以得到唯一可行解。

3.3 齿轮副综合啮合刚度的求解

斜齿面齿轮的齿厚在齿宽方向上不断变化,故目前还未见斜齿面齿轮副啮合刚度的解析求解法。基于以上求解,可获得接触区域上各节点的载荷和变形,从而求得单对齿啮合刚度:

$$k_n = \frac{F}{\delta_u} \quad (24)$$

式中 δ_u 为单对轮齿的综合弹性变形。

本文中, δ_u 定义为整片接触区域上所有对应节点间弹性变形的平均值,即

$$\delta_u = \frac{\sum_{i=1}^m (\omega_i^1 + \omega_i^f)}{m} \quad (25)$$

式中 m 为实际接触的节点个数。

多对齿接触时,各接触齿对间可看作是并联弹簧,故将同时啮合轮齿的单对齿啮合刚度进行分段叠加,即可得

啮合副的综合啮合刚度 K_m :

$$K_m = \sum_i^s K_{ni} \quad (26)$$

式中 s 为同时啮合的轮齿对数。

3.4 实例计算

斜齿轮的法面模数 $m_n=4$, 齿数 $N_1=27$, 压力角 $\alpha=22.5^\circ$, 螺旋角 $\beta=10^\circ$, 刀具齿数 $N_s=28$, 面齿轮齿数 $N_f=131$ 。

1) 初始距离 h_i

图 5 所示为接触点附近两齿面对应点间的初始距离图。由图可知,斜齿面齿轮内径靠近齿根和外径靠近齿顶处,两齿面上对应点间的初始距离较大,而在接触点附近,两齿面上对应点间初始距离较小,该趋势与两齿面形状吻合。

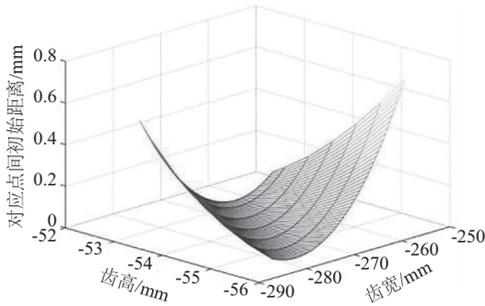


图 5 接触区域对应点间初始距离

2) 接触区域载荷分布

图 6 所示为斜齿面齿轮齿面接触区域上的载荷分布,该接触区域上最大载荷出现在初始接触点(椭圆中心)处,接触区域的载荷在空间内呈半椭球体分布,这与 Hertz 接触理论是吻合的。

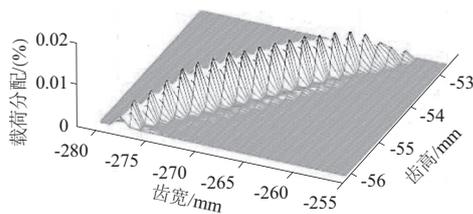


图 6 接触变形区域载荷分布

3) 啮合刚度

根据式(22)和式(23)求得单对齿从啮入到啮出过程中,啮合刚度计算值及傅里叶拟合曲线如图 7。

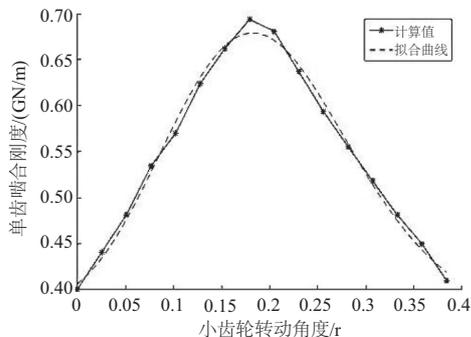


图 7 单齿啮合刚度曲线

将单对齿啮合刚度曲线向左、右移动角度 $\Delta\varphi$ 可得临近齿对的单齿啮合刚度曲线如图 8。 $\Delta\varphi$ 为斜齿圆柱齿轮转过一个周期的转角与重合度的比值。

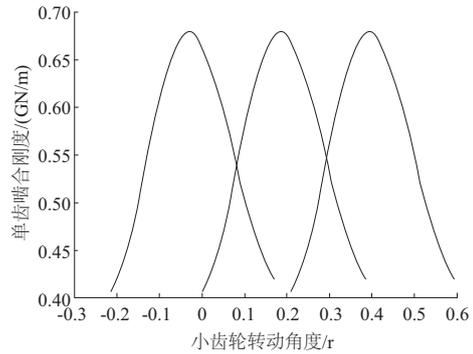


图 8 各啮合齿对的啮合刚度

将各单齿对的啮合刚度按式(24)进行分段叠加,得综合啮合刚度,如图 9。

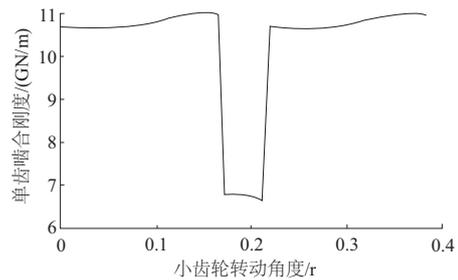


图 9 综合啮合刚度

4) 最大接触应力计算结果与验证

采用本文方法和 Hertz 理论法分别计算单对齿啮合时接触区域的最大接触应力,结果如图 10 所示。其中,施加的载荷 $F=2500\text{ N}$ 。由图可知,啮合过程中,两种方法所得接触应力的最大误差为 7.87%,最小误差接近 0。

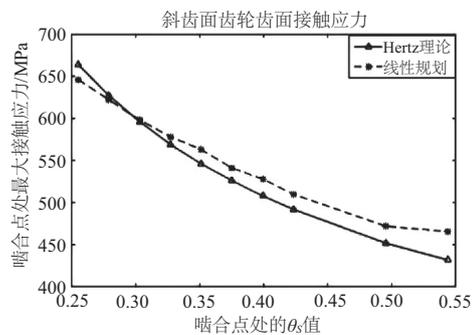


图 10 斜齿面齿轮齿面最大接触应力

4 结语

本文主要做了如下工作:

1) 通过包络理论和齿轮啮合原理推导了斜齿面齿轮的齿面方程,并基于 matlab 实现其齿面及接触轨迹的可视化。

(下转第 63 页)

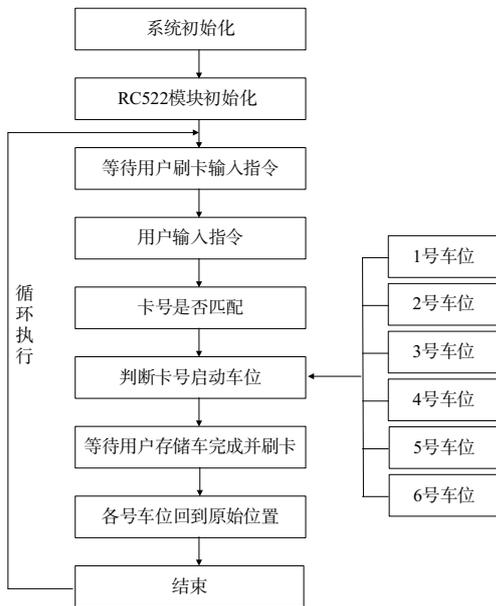


图6 工作流程图

解决了自行车停放杂乱无章、占地面积大、影响通行的问题,可为大多数城市小区内自行车的管理提供一种可参考的解决方案。

参考文献:

- [1] “十三五”现代综合交通运输体系发展规划[EB/DL]. (2017-02-03). http://www.china.com.cn/guoqing/shisanwu/2017-02-01-03/01/content_40381181.htm.

- [2] 卢倚天. 基于规划文件分析的当代美国大学校园动态更新规划设计方法初探[D]. 广州:华南理工大学, 2016.
- [3] 叶洋. 基于绿色交通理念的城市中心区空间优化研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2016.
- [4] 王思明. 自行车与城市轨道交通换乘(B+R)系统的空间设计研究[D]. 北京:北京建筑大学, 2013.
- [5] 夏天. 城市区域慢行交通系统化研究[D]. 北京:北京交通大学, 2011.
- [6] 李伟. 哥本哈根自行车交通政策[J]. 北京规划建设, 2004(2):46-51.
- [7] 姜斌, 赵祎乾. 基于物联网基础的校园自行车服务系统研究[J]. 包装工程, 2015(12):37-40.
- [8] 姜洋, 陈宇琳, 张元龄, 等. 机动化背景下的城市自行车交通复兴发展策略研究——以哥本哈根为例[J]. 现代城市研究, 2012(9):7-16.
- [9] 王琴, 杨连发, 张震, 等. 自行车停放装置的开发应用现状及发展趋势[J]. 现代机械, 2009(5):82-84.
- [10] 吴瑶, 陈红, 鲍娜, 等. 基于多项logit模型的城市公共自行车租借需求预测模型[J]. 大连交通大学学报, 2013(1):19-24.
- [11] 刘颖, 李克平, 张振华. 城市商业区自行车停车需求预测方法及应用[J]. 华东交通大学学报, 2007(2):52-54.
- [12] 丁亚东, 熊刚. 基于单片机的智能防酒驾装置设计[J]. 机械制造与自动化, 2018, 47(5):130-133.
- [13] 许乃星, 戢晓峰. “U&B”模式下自行车停车需求预测研究[J]. 道路交通安全, 2009(5):37-40.

收稿日期:2018-12-07

(上接第21页)

2) 建立适合斜齿面齿轮接触问题的线性规划模型, 对单纯形算法加以改进, 求得齿面载荷分布和各接触位置的弹性变形, 给出了基于有限元和线性规划求解斜齿面齿轮副啮合刚度的方法。

3) 通过与传统的 Hertz 接触理论计算出的接触应力进行对比, 得到的误差均在 8% 以内, 证明了本文方法的有效性。

本文为斜齿面齿轮齿面接触问题提出了一种行之有效的计算方法, 给出了一种计算斜齿面齿轮副啮合刚度的途径, 为斜齿面齿轮传动中接触强度的分析提供了一定的理论基础。

参考文献:

- [1] 靳广虎. 正交面齿轮传动的强度与动力学特性分析研究[D]. 南京:南京航空航天大学, 2012.
- [2] LITVIN. F. L., EGELJA. A., TAN. J., et al. Handbook on face gear drives with a spur involute pinion[M]. USA: HASA, 2000.
- [3] LITVIN F. L., FUENTES. A. Face-gear drive with spur involute pinion: geometry, generation by a worm, stress analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(25/26):2785-2813.
- [4] 沈云波, 方宗德, 赵宁, 等. 斜齿面齿轮齿宽的设计[J]. 航空动力学报, 2008(4):754-758.
- [5] 赵宁, 曾晓春, 郭辉, 等. 斜齿面齿轮齿面仿真及其轮齿接触

分析[J]. 航空动力学报, 2008(10):1927-1932.

- [6] 方宗德. 斜齿齿轮面柔度矩阵与修形的有限元计算[J]. 航空动力学报, 1994(3):242-244.
- [7] WU S H., TSAI S J. Contact stress analysis of skew conical involute gear drives in approximate line contact[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(9):1658-1676.
- [8] YE.S.Y., TSALS.J. Loaded tooth contact analysis of power-split gear drives considering shaft deformation and assembly errors[C]. ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2015.
- [9] SHUTING. L. I. Gear contact model and loaded tooth contact analysis of a three-dimensional, thin-rimmed gear[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(3):511-517.
- [10] 纪名刚. 用有限元-线性规划法解弹性接触问题[J]. 机械设计, 1983(1):1-11.
- [11] T. F. Conry, A. Seireg. A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact[J]. Journal of Applied Mechanics, 1971, 38(2):387-392.
- [12] 唐有光. 弹性体接触问题的线性规划解法[J]. 洪都科技, 2002(3):6-11.
- [13] 唐进元, 蒲太平. 基于有限元法的螺旋锥齿轮啮合刚度计算[J]. 机械工程学报, 2011, 47(11):23-29.

收稿日期:2018-12-20