

刚体空间定位问题的最优控制研究

王丽¹,蔡锁宁²

(1. 陕西工业职业技术学院,陕西 咸阳 712000; 2. 陕汽集团商用车有限公司,陕西 宝鸡 722405)

摘要:利用四元数描述刚体的有限转动,得到刚体的有限转动状态方程。以四元数分量表示刚体的方位偏差,建立刚体定位控制运动学模型,以系统具有全局渐进稳定的特性导出定位过程的控制量与方位偏差的通用函数形式。在状态空间利用状态方程解的单调性和有界性分析了状态方程的解轨线在状态不动点邻域的变化趋势,给出了刚体趋近并稳定到目标姿态的条件。为实现定位过程的快速性,提出定位路径最短的最优控制方法,利用性能泛函的变分和极值条件,导出最优控制的状态方程及其边界条件,从而将刚体最优控制归结为微分方程两点边值问题。

关键词:四元数;定位问题;稳定性;状态方程

中图分类号:TP273+.1 **文献标志码:**B **文章编号:**1671-5276(2020)03-0198-04

Optimal Control Research on Spatial Location of Rigid Body

WANG Li¹, CAI Suoning²

(1. Shaanxi Polytechnic Institute, Xianyang 712000, China;

2. Shaanxi Motor (Group) Works Commercial Car Co., Ltd., Baoji 722405, China)

Abstract: This paper uses the quaternion to describe the finite rotation of rigid body, and obtains its finite rotation state equation. Its azimuth deviation is represented by quaternion components, and its locating control kinematic model is established. The control quantity in the locating process and the general function form of the azimuth deviation are derived from the global asymptotic stability of the system. The changing trend of the solution trajectory of the state equation in the neighborhood of the state fixed point is analyzed by using the monotonicity and boundedness of the state equation solution in the state space, and the conditions that the rigid body approaches to stable target attitude are given out. To rapidly locate, an optimal control method with the shortest path is proposed and the state equation and boundary conditions of the optimal control are derived by using the variational and extreme conditions of the performance function. Thus, the optimal control of the rigid body is summed up as the two-point boundary value problems of the differential equation.

Keywords: quaternion; location; stability; state equation

0 引言

四元数代数理论是表示有限转动的最简明方法,因而四元数在刚体定点转动和球面机构的运动学、动力学及其控制问题的研究中得到了广泛的应用。KIUMARSI B^[1]针对存在输入约束的确定性非线性离散时间跟踪控制问题,提出了一种部分无模型自适应最优控制方法。XIAO G^[2]构造了由误差系统动力学和期望轨迹动力学组成的增广系统,研究了一类完全未知动态仿射非线性连续时间系统的最优跟踪控制问题。KONG Xianwen^[3]以四元数代数和几何分析方法给出了欧拉参数表示的并联机构运动学方程及可操作模式。赵金刚^[4]针对运动规划的非完整性问题,引入效用函数,实现了非完整运动规划的最优控制。彭海军^[5]利用多体动力学建立系统的动力学方程,通过引入对目标轨迹跟踪及瞬时最优性能指标,获得最优控制量。屈秋霞^[6]针对非线性连续系统难以跟踪时变轨迹的

问题,通过系统变换将其转化为非线性时不变系统的最优控制问题。贾意弦^[7]采用四元数描述刚体姿态运动,避免了欧拉角存在的奇异性。史革盟^[8]用四元数表示构件的有限转动,得到四元数形式的运动方程。李保坤^[9]以单位四元数描述刚体的姿态,导出 Stewart 机构处于给定位置时的姿态奇异表达式。程世利^[10]采用四元数表示旋转变换,得到并联机构四元数形式的基本方程和奇异方程。本文将四元数代数理论用于刚体的姿态定位控制,通过不动点稳定性分析得到解轨线在状态空间的变化趋势及收敛域,建立大范围渐近稳定控制的条件,从微分几何的角度,分析刚体定位过程解轨线的几何约束,构造最短路径控制的目标泛函,实现了刚体的快速定位。

1 刚体有限转动运动学方程

根据刚体无限小旋转变换^[11],得式(1):

$$d\Lambda = 1 + \xi \frac{\Delta\theta}{2} = 1 + \frac{1}{2}\omega dt \quad (1)$$

式中: ξ 为四元数 Λ 矢量方向的单位矢量; $\Delta\theta$ 、 ω 分别为刚体的无限小转角和角速度。

取参考坐标系 I , 并在刚体上固连动坐标系 E , 设在微小时间间隔 Δt 内, 动坐标系从 $E(t)$ 变换到位置 $E(t+\Delta t)$, 从坐标系 I 到 $E(t+\Delta t)$ 的变换可以看成是由 I 到 $E(t)$, 再从 $E(t)$ 到 $E(t+\Delta t)$, 与其相应的四元数为 $\Lambda(t)$ 和 $\Lambda(t+\Delta t)$, 两次转动的合成四元数 $\Lambda(t+\Delta t) = \Lambda(t) \cdot d\Lambda = \Lambda(t) + \frac{1}{2}\Lambda(t) \cdot \omega dt$

由上式可得刚体有限转动运动方程:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\Lambda(t+\Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\Lambda(t) \cdot \omega(t) \quad (2)$$

按四元数乘积展开上式, 得到四元数分量形式的一阶线性微分方程组:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3 \\ \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3 \\ \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1 \\ \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \triangleq f[\lambda, \omega, t] \end{aligned} \quad (3)$$

2 空间定位问题的运动学稳定控制

2.1 运动学渐近稳定控制的条件

空间定位问题就是改变刚体的角速度 ω_E , 使得与其固连的坐标系 E 与参考坐标系 I 方向一致。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_0 = \pm 1 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (4)$$

为了满足式(4)给出的快速定位条件, 就要求式(3)中的后3个关于 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ 的微分方程具有李雅普诺夫意义下全局渐近稳定的动态特性。取李雅普诺夫函数

$$V(\lambda, t) = \lambda^T \lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

对时间 t 求导, 并代入式(3)中的关系

$$\dot{V}(\lambda, t) = 2\lambda^T \dot{\lambda} = \lambda_0 (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_3 \omega_3) \quad (5)$$

为了使得 $\dot{V}(\lambda, t)$ 为负定函数, 角速度分量取成如下形式

$$\omega_i = -k_i \lambda_0 \lambda_i \quad i=1, 2, 3 \quad (6)$$

式中 k_i 为角速度修正系数。当 $k_i > 0$ 时,

$$\dot{V}(\lambda, t) = -\lambda_0^2 (k_1 \lambda_1^2 + k_2 \lambda_2^2 + k_3 \lambda_3^2) < 0 \quad (7)$$

符合全局渐近稳定条件, 式(3)后3个状态方程能从任意初始状态收敛到原点。

2.2 状态空间不动点稳定性分析

将式(6)代入式(3)可得状态方程:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_0 = \frac{\lambda_0}{2} (k_1 \lambda_1^2 + k_2 \lambda_2^2 + k_3 \lambda_3^2) \\ \dot{\lambda}_1 = \frac{\lambda_0}{2} [-k_1 \lambda_0 \lambda_1 + (k_2 - k_3) \lambda_2 \lambda_3] \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{\lambda_0}{2} [-k_2 \lambda_0 \lambda_2 + (k_3 - k_1) \lambda_3 \lambda_1] \\ \dot{\lambda}_3 = \frac{\lambda_0}{2} [-k_3 \lambda_0 \lambda_3 + (k_1 - k_2) \lambda_1 \lambda_2] \end{cases} \quad (8)$$

它是一阶非线性微分方程组。在状态空间所有状态

变量对时间导数全都等于0的状态 $\dot{\lambda}_i = 0, i=0, 1, 2, 3$, 表现为状态空间上位置固定的不动点。对式(8)有2类不动点, 第1类是当 $\lambda_0 = 0$, 形如 $[0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$, $\sum \lambda_i^2 = 1$ 的点都是状态方程的不动点, 随着 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ 取值的不同, 这类不动点有无数个。第2类是当 $\lambda_0 \neq 0$, 可直接得到2个不动点 $[\pm 1, 0, 0, 0]^T$ 。

根据非线性微分方程理论, 状态方程解分量 $\lambda_i(t)$, ($i=0, 1, 2, 3$) 都是时间的单调增函数或单调减函数, 由于四元数 Λ 范数恒等于1, 其分量函数 $\lambda_i(t)$ 为有界函数, $|\lambda_i(t)| \leq 1$, 因而从任意初始状态出发的解轨线都将趋近并终止于某个不动点。

1) $k_i > 0, \forall i=1, 2, 3$

当 $k_i > 0$ 时, 式(8) $\dot{\lambda}_0$ 与 λ_0 具有相同的符号, 而不会改变, $\lambda_0(t)$ 的绝对值随着时间 t 增大而增大, 考虑到各分量单调且有界, 所以有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_0(t) = \begin{cases} 1 & \lambda_0(0) > 0 \\ -1 & \lambda_0(0) < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (9)$$

状态方程的解轨线都将趋近并稳定到第2类不动点 $[1, 0, 0, 0]^T$ 或 $[-1, 0, 0, 0]^T$ 。

2) $k_i < 0, \forall i=1, 2, 3$

当 $k_i < 0$ 时, $\dot{\lambda}_0$ 与 λ_0 符号始终相反, $|\lambda_0(t)|$ 随着时间 t 增大而减小, 所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_0(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) = 1 \quad (10)$$

状态方程的解轨线都将趋近并稳定到第1类不动点 $[0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ 。

3 刚体定位问题最短路径控制

在如上渐进控制中, 收敛速度取决于修正系数 k_i 的取值大小, 这会导致定位过程仅是一种可达路径并非最短路径。将状态方程的解轨线看作状态空间的参数曲线

$$r(t) = [\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]^T \quad (11)$$

由于旋转变换四元数为规范化四元数, 其分量始终满足 $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = |r(t)| = 1$, 它表示四维空间上的超球面, 所以定位过程即是状态方程从任意初始状态沿着上式给定的超球面到达目标点 $[1, 0, 0, 0]^T$ 或 $[-1, 0, 0, 0]^T$ 。状态轨线的切向量

$$\dot{r}(t) = [\dot{\lambda}_0(t), \dot{\lambda}_1(t), \dot{\lambda}_2(t), \dot{\lambda}_3(t)]^T \quad (12)$$

定位轨线最短路径即是沿超球面上过这两点所在的大圆的劣弧到达目标点 M 。超球面上各点向径具有固定长度:

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{r}(t)|^2 = \frac{d}{dt} \mathbf{r}^T(t) \mathbf{r}(t) = 2\dot{\mathbf{r}}^T(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$$

解轨线切向量始终与向径正交。将式(3)的定位过程解轨线弧长取为性能指标泛函

$$2S = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{2\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) 2\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)} dt \triangleq \int_{t_0}^{t_f} L[\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\omega}(t), t] dt \quad (13)$$

式中 t_0, t_f 分别为初始和末态时刻。末态时刻 t_f 不确定,末态固定 $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = [1, 0, 0, 0]^T$; L 为拉格朗日函数。

$$L[\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\omega}(t), t] = \sqrt{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t)}$$

引入状态约束的拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\eta}(t)$, 将被控系统状态方程式(3)和性能指标泛函结合成辅助泛函

$$J[\boldsymbol{\omega}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \{ H[\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\omega}(t), t] - \boldsymbol{\eta}^T(t) \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \} dt$$

式中 H 为哈密顿标量函数。

$$H[\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\eta}^T(t), t] = L[\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\omega}(t), t] + \boldsymbol{\eta}^T(t) f[\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}, t]$$

将 J 对所有变量 $t_f, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}$ 进行变分:

$$\delta J = \{ H[\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\eta}^T(t), t] \}_{t=t_f} \delta t_f + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \right) \delta \boldsymbol{\lambda}(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \right) \delta \boldsymbol{\eta} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\omega}^T} \delta \boldsymbol{\omega} \right] dt$$

根据泛函极值的必要条件 $\delta J = 0$ 可得:

1) 规范方程及边界条件

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}(t)} = f[\boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\omega}(t), t] = \mathbf{F}\boldsymbol{\omega} \quad (14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}(t)} = -\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{F}_\eta^T \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\omega} \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = [\lambda_0(0), \lambda_1(0), \lambda_2(0), \lambda_3(0)] \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = [\text{sign}\lambda_0, 0, 0, 0]$$

2) 极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\omega}(t)} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}(t)} + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\omega}(t)} \boldsymbol{\eta}(t) = \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}^T \boldsymbol{\eta}(t) = 0 \quad (17)$$

从中求得控制量

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -|\boldsymbol{\omega}(t)| \mathbf{F}^T \boldsymbol{\eta}(t) \quad (18)$$

代入规范方程式(14)和式(15)得最短路径控制的状态方程:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -|\boldsymbol{\omega}(t)| \mathbf{F} \mathbf{F}^T \boldsymbol{\eta}(t) \quad (19)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = -|\boldsymbol{\omega}(t)| \mathbf{F}_\eta^T \mathbf{F}^T \boldsymbol{\eta}(t) \quad (20)$$

定位过程的弧长只与解轨线的路径有关,因而角速度 $|\boldsymbol{\omega}(t)|$ 可以取任意正实数。

4 应用实例

假设初始时刻与刚体固连的动坐标系对参考坐标系的偏差四元数

$$\Lambda(t_0) = [0.36, -0.30, 0.48, -0.73]^T$$

取角速度修正系数 $k_1 = 4.0, k_2 = 6.0, k_3 = 8.0$, 求解刚体运动微分方程式(8), 得到偏差四元数的解轨线变化趋势, 如图1所示。

偏差四元数的分量以近似于指数函数的速度趋近目

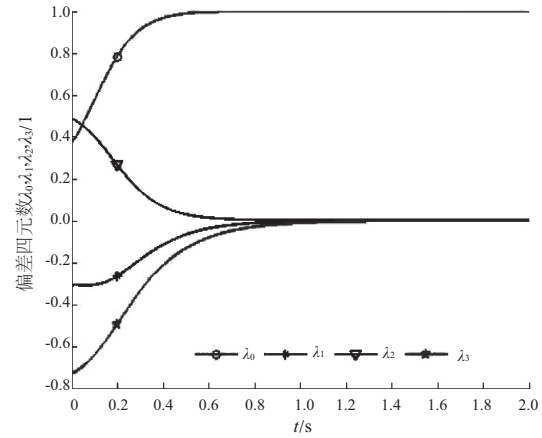


图1 偏差四元数的解轨迹

标值, 在控制作用 2s 后, 偏差缩小到 10^{-6} 的范围之内。为了验证不动点的稳定性, 取状态空间某个半径 $0 < |\mathbf{r}(t)| < 1$ 超球面上的点作为初始偏差, 求解刚体状态空间方程式(8)的解轨线, 给出了解轨线在 $\lambda_0 - \lambda_1$ 平面上的投影。当 $k_i > 0, \forall i=1, 2, 3$, 对于所有初始偏差 $\lambda_0 < 0$ 解轨线都趋近并稳定到第 2 类不动点 $[-1, 0, 0, 0]^T$, 对于所有 $\lambda_0 > 0$ 解轨线都趋近并稳定到第 2 类不动点 $[1, 0, 0, 0]^T$, 它们是稳定的不动点, 如图 2 所示。当 $k_i < 0, \forall i=1, 2, 3$, 所有解轨线都趋近并稳定到第 1 类不动点 $[0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$, 如图 3 所示。

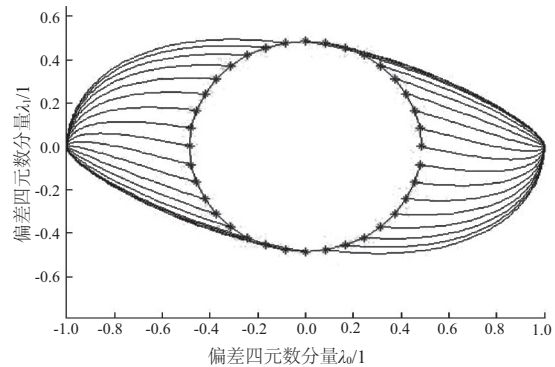


图2 状态空间稳定的第2类不动点

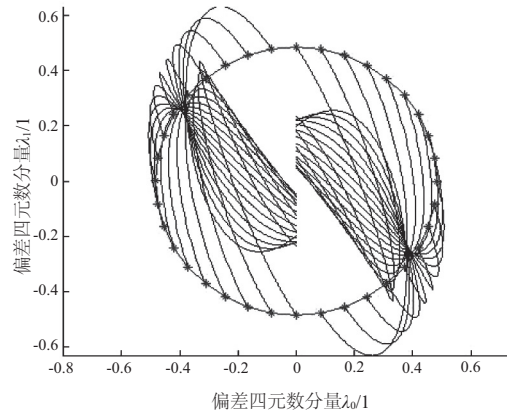


图3 状态空间稳定的第1类不动点

对刚体按式(19)和式(20)的规范方程及其边界条件式(16)进行最优控制,得到偏差四元数的解轨线,如图4所示。

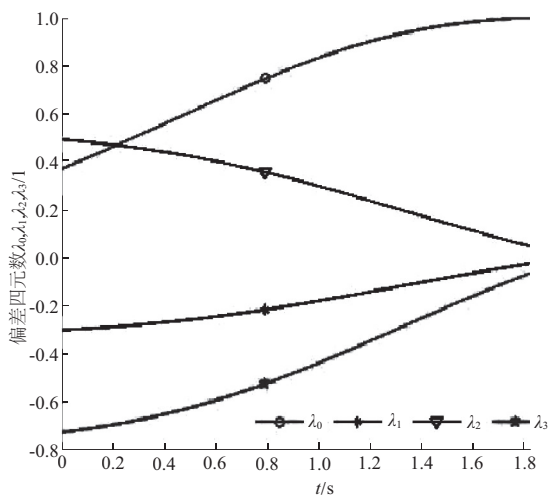


图4 最优控制下偏差四元数的解轨线

5 结语

1) 利用四元数分量表示纯转动刚体定位偏差,并作为被控制量实现对刚体有限转动进行大范围渐进稳定的控制。

2) 对状态方程不动点的稳定性分析,得到刚体定位过程中状态方程的解轨线在不动点邻域的变化趋势,导出刚体趋近并定位到目标姿态的收敛条件。结果表明,定位过程被控制量以指数函数的速度趋近目标值。

3) 结合刚体定位和姿态控制问题的一般特点,从微分几何的角度,分析了定位过程解轨线满足的几何约束,构造出量化最短路径控制的目标泛函,导出最优控制应该满足的状态方程、边界条件和极值条件,进而将刚体定位

最优控制问题处理为一阶非线性微分方程的两点边值问题。

参考文献:

- [1] KIUMARSI B, LEWIS F L. Actor-critic-based optimal tracking for partially unknown nonlinear discrete-time systems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2017, 26(1): 140-151.
- [2] XIAO G, ZHANG H, LUO Y, et al. Data-driven optimal tracking control for a class of affine non-linear continuous-time systems with completely unknown dynamics[J]. Control Theory & Applications, 2016, 10(6): 700-710.
- [3] KONG Xianwen. Reconfiguration analysis of a 3-DOF parallel mechanism using Euler parameter quaternions and algebraic geometry method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014(74): 188-201.
- [4] 赵金刚, 戈新生. 基于动态规划的机器人运动规划最优控制[J]. 控制工程, 2017(11): 188-193.
- [5] 彭海军, 李飞, 高强, 等. 多体系统轨迹跟踪的瞬时最优控制保辛方法[J]. 力学学报, 2016, 48(4): 784-791.
- [6] 屈秋霞, 罗艳红, 张化光. 针对时变轨迹的非线性仿射系统的鲁棒近似最优跟踪控制[J]. 控制理论与应用, 2016, 33(1): 77-84.
- [7] 贾意弦, 马云建, 牛云河, 等. 基于四元数的刚体姿态运动的可视化仿真研究[J]. 机电技术, 2015(5): 53-55.
- [8] 史革盟. 球面三自由度并联机构瞬时运动分析[J]. 机电工程, 2019, 36(1): 7-12.
- [9] 李保坤, 曹毅, 黄真, 等. 基于单位四元数的 Stewart 机构姿态工作空间研究[J]. 机器人, 2008, 30(4): 353-358.
- [10] 程世利, 吴洪涛, 王超群, 等. 平面平台型 Stewart 并联机构的奇异性分析[J]. 机械工程学报, 2011, 47(9): 1-7.
- [11] B.H. 勃拉涅茨, N. П. 什梅格列夫斯基. 四元数在刚体定位问题中的应用[M]. 梁振和, 译. 北京: 国防工业出版社, 1978, 23-28.

收稿日期: 2019-12-06