

挥舞旋转运动薄板磁弹性振动分析

冯小庭,王航,史骏

(西安铁路职业技术学院,陕西 西安 710026)

摘要:基于非线性薄板理论假设,建立了旋转运动柔性薄板在横向磁场环境下的振动方程。应用 Maxwell 电磁定律得出导电薄板的电磁本构关系,得到了 Lorentz 力的表达公式。在考虑了薄板横向变形引起的轴向缩短基础上,使用 Hamilton 原理推导出在磁场中旋转运动薄板的变分方程,并使用 Galerkin 法对方程进行离散,研究了旋转运动、磁场强度以及薄板长宽比对薄板振动的影响。

关键词:薄板;旋转运动;磁弹性;振动

中图分类号:TP202 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2020)03-0134-04

Magnetoelastic Vibration Analysis of Flapping Thin Plate

FENG Xiaoting, WANG Hang, SHI Jun

(Xi'an Railway Vocational & Technical Institute, Xi'an 710026, China)

Abstract: Based on the assumption of nonlinear thin plate theory, the vibration equation of rotating flexible thin plate in magnetic field is established. The electromagnetic relation of the conducting thin plate and the expression formula of Lorentz force is obtained by Maxwell's law. Considering the axial shortening caused by the transverse deformation of the thin plate, the equation of the rotating thin plate in the magnetic field is derived by Hamilton principle. The equation is discretized by Galerkin method. The effects of rotating motion, magnetic field strength and length width ratio of plate on vibration of the thin plate are studied.

Keywords: thin plate; flapping motion; magnetoelasticity; vibration

0 引言

在复杂物理场中的薄板振动分析可以指导很多实际问题。例如在热场、流场中做旋转运动的透平机械,其叶轮的振动可以简化为旋转运动薄板的振动。有大量的文献涉及导电物体的磁弹性振动分析,其中不乏作轴向运动薄板的磁弹性振动研究,亦有大量的学者研究了作旋转运动梁、板的振动分析。文献[1-9]分别对非线性振动特性、动力失稳特性、振动位移响临界失稳荷载的影响做了深入研究,柔性薄板在磁场中的磁弹性振动分析已有丰富资料。作挥舞旋转运动的导电薄板的磁弹性分析尚不多见。导电材质的磁弹性分析有着现实的意义。

本文基于薄板理论,建立了旋转柔性薄板在横向磁场环境下的振动运动方程。应用 Maxwell 电磁定律得出导电薄板的电磁本构关系,使用 Hamilton 原理推导出在磁场中旋转运动薄板的动力学方程,并使用 Galerkin 法对方程进行离散,进一步研究挥舞旋转运动和磁场协同作用下薄板振动的特性。

1 系统建模

1.1 系统动能和势能

导电薄板在磁场中做旋转运动的模型,如图 1 所示。

其中,惯性坐标系 $Oxyz$, 中心刚体的附体坐标系为 $O_1x_1y_1z_1$, 柔性薄板的附体坐标系为 $O_2x_2y_2z_2$ 。 x_2 轴、 y_2 轴分别沿薄板的长、宽方向。中心刚体的半径为 R , 绕 y_1 轴的转动惯量为 J , 板长为 a , 宽度为 b , 板厚为 h 。弹性模量为 E , 泊松比为 μ , 密度为 ρ 。薄板绕刚体中心轴线做旋转运动的角位移是 θ 。建立动力学方程时不计重力。

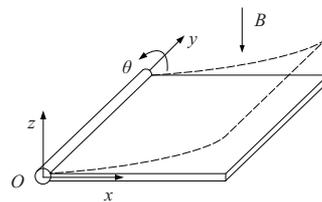


图 1 系统模型示意图

薄板上任意一点 $P_0(x, 0, 0)$ 变形后的位置是 P , 其在浮动坐标系 $O_2x_2y_2z_2$ 下的变形矢量为 $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ 。在附体坐标系 $O_2x_2y_2z_2$ 下的矢径为 P 点, 在附体坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 下的矢径为

$$\mathbf{r} = (R+x+u)\mathbf{i} + (y+v)\mathbf{j} + w\mathbf{k} \tag{1}$$

P 点在惯性坐标系 $Oxyz$ 下的矢径为

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R+x+u \\ y+v \\ w \end{bmatrix} \tag{2}$$

基金项目:陕西省 2019 年度纵向课题资助项目(19JK0697)

第一作者简介:冯小庭(1985—),男,陕西榆林人,讲师,实验师,硕士研究生,研究方向为机电一体化。

r 关于时间求导, 得 P 点的速度矢量

$$\mathbf{V} = \{ [\dot{w} - (R+x+u)\dot{\theta}] \sin\theta + (\dot{u} + w\dot{\theta}) \cos\theta \} \mathbf{i} + v\mathbf{j} + \{ [\dot{w} - (R+x+u)\dot{\theta}] \cos\theta - (\dot{u} + w\dot{\theta}) \sin\theta \} \mathbf{k} \quad (3)$$

则系统的动能为

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int \rho \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} dV = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \rho h \int_0^a \int_0^a \{ [\dot{w} - (R+x+u)\dot{\theta}]^2 + \dot{v}^2 + (\dot{u} + w\dot{\theta})^2 \} dx dy \quad (4)$$

根据薄板理论, 薄板横向变形引起轴向的缩短, 得:

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (5)$$

$$v = -\frac{1}{2} \int_0^y \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 d\eta$$

计算系统势能时, 忽略面内拉伸引起的变形以及中面变形, 故系统势能仅是弯曲变形的应变能, 即:

$$U = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (6)$$

式中薄板弯曲刚度 $D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$ 。

1.2 电磁力和电磁力矩

薄板内部的介质满足 Maxwell 电磁本构关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}; \\ \mathbf{J} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}); \\ \mathbf{f} &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (7)$$

其中: \mathbf{V} 是旋转运动薄板各点的速度矢量; 磁感应矢量为 $\mathbf{B}(B_x, B_y, B_z)$; 电位移矢量为 $\mathbf{D}(D_x, D_y, D_z)$; 电场强度矢量为 $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$; 磁场强度矢量为 $\mathbf{H}(H_x, H_y, H_z)$; 电流密度矢量为 $\mathbf{J}(J_x, J_y, J_z)$; ε_0 为真空介电常数; μ_0 为真空磁导率; σ 为电导率; 忽略扰动电场 e_0 。

设导电薄板在横向磁场中运动, 即磁感应强度矢量为 $\mathbf{B}(0, 0, B_z)$ 。此时单位面积所受电磁力和电磁力矩:

$$F_x = \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = -B_z^2 h \sigma \{ (\dot{u} + w\dot{\theta}) \cos\theta + [\dot{w} - (R+x+u)\dot{\theta}] \sin\theta \};$$

$$F_y = \int_{-h/2}^{h/2} f_y dz = -B_z^2 h \sigma v;$$

$$F_z = \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = 0;$$

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} f_x z dz = 0;$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} f_y z dz = 0.$$

外力虚功为:

$$\delta W = \tau \delta \theta + \int_0^a \int_0^a [F_x \delta r_x + F_y \delta r_y + F_z \delta r_z + m_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + m_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)] dx dy \quad (9)$$

1.3 动力学方程

将式(4)、式(6)、式(9)代入式(10)。根据 Hamilton 变分原理

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (10)$$

其中 t_0, t_1 为任意两个固定时刻。

考虑到横向变形比较大, 故仅考察薄板的横向振动, 则旋转运动薄板的磁弹性振动变分方程为:

$$\rho h \int_0^a \int_0^a \{ (w\dot{\theta} + \dot{u})\dot{\theta} - [\dot{w} - (R+x+u)\dot{\theta} - \dot{u}\dot{\theta}] - D \int_0^a \int_0^a \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \} \delta w dx dy - B_z^2 h \sigma \int_0^a \int_0^a \{ (\dot{u} + w\dot{\theta}) \cos\theta + [\dot{w} - \theta(R+u+x)] \sin\theta \} \sin\theta \delta w dx dy = 0 \quad (11)$$

2 振动分析

采用 Galerkin 法离散, 设横向振动的解为

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn}(t) \psi_m(x) \varphi_n(y) \quad (12)$$

将式(12)带入变分方程式(11)中, 由于广义坐标是相互独立的, 故 δq_{ij} 的系数项分别为 0。则振动方程整理为

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \ddot{q}_{mn}(t) M_{mn}^{ij} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \dot{q}_{mn}(t) C_{mn}^{ij} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn}(t) K_{mn}^{ij} - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_{mn}^{ij} = 0 \quad (13)$$

其中广义坐标向量为: $\mathbf{Q} = \{ q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1N}, \dots, q_{M1}, q_{M2}, \dots, q_{MN} \}^T$ 。将系统的振动方程整理为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (14)$$

其中: 广义质量矩阵

$$M_{mn}^{ij} = \int_0^a \int_0^a \psi_i(x) \varphi_j(y) \psi_m(x) \varphi_n(y) dx dy;$$

广义坐标一次导的系数矩阵

$$C_{mn}^{ij} = \int_0^a \int_0^a \psi_i(x) \varphi_j(y) \{ 2\gamma_m(x) \varphi_n(y) \dot{\theta} - B_z^2 \sigma \rho^{-1} \sin\theta [\gamma_m(x) \varphi_n(y) \cos\theta + \psi_m(x) \varphi_n(y) \sin\theta] \} dx dy;$$

$$K_{mn}^{ij} = \int_0^a \int_0^a \psi_i(x) \varphi_j(y) \{ \psi_m(x) \varphi_n(y) \dot{\theta}^2 + \gamma_m(x) \varphi_n(y) \ddot{\theta} - D \rho^{-1} h^{-1} [\psi_m^{(4)}(x) \varphi_n(y) + 2\psi_m''(x) \varphi_n'(y) + \psi_m(x) \varphi_n^{(4)}(y)] - B_z^2 \sigma \rho^{-1} \sin\theta [\psi_m(x) \varphi_n(y) \dot{\theta} \cos\theta - \gamma_m(x) \varphi_n(y) \dot{\theta} \sin\theta] \} dx dy;$$

广义坐标的零次项系数矩阵

$$F_{mn}^{ij} = - \int_0^a \int_0^a \psi_i(x) \varphi_j(y) \{ (R+x)\ddot{\theta} - B_z^2 \sigma \rho^{-1} \sin\theta [(R+x)\dot{\theta} \sin\theta] \} dx dy;$$

$$其中 \gamma_m(x) = \int_0^x \psi_m''(x) dx。$$

3 数值计算

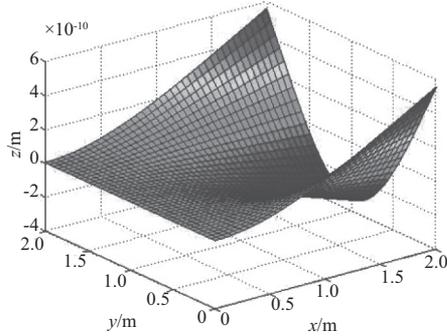
磁感应强度为 $B_z = 0.1 \text{ T}$, 薄板挥舞运动角速度 $\Omega = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 时长为 2 s, 薄板长为 2 m, 宽 2 m, 厚 0.1 m, 中心刚体的半径 $R = 0.2 \text{ m}$, 弹性模量为 206 GPa, 泊松比为

0.3, 密度为 $7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $M=5, N=5$ 。中心刚体运动角速度为

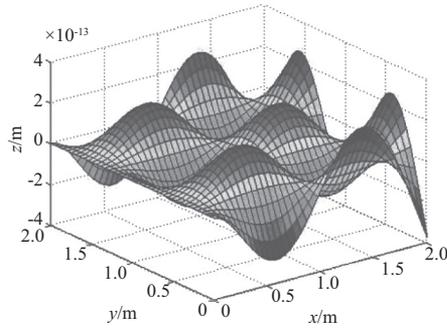
$$\dot{\theta} = \Omega \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right), \quad 0 \leq t \leq T \quad (15)$$

式中: Ω 为稳态旋转角速度; T 是旋转加速运动的时间, 取为 2 s。

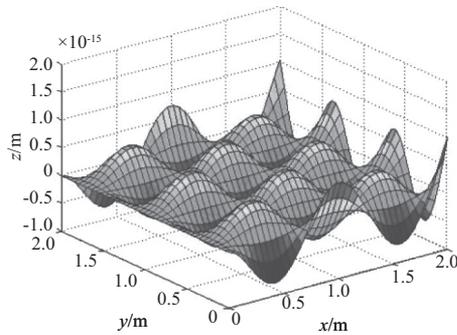
图 2 是在磁场中作挥舞运动的薄板不同阶振动模式。其中, 图 2(a) 是 $m=1, n=1$ 阶振动模式, 相比于其他阶振动模式, 其横向位移比较大, 这说明 (1, 1) 阶振动是实际振动的主要成分。



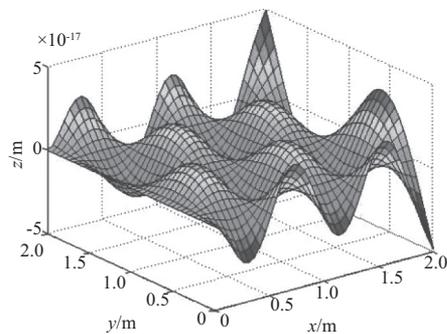
(a) $m=1, n=1$



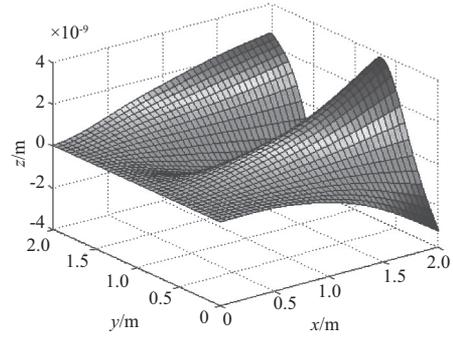
(b) $m=2, n=3$



(c) $m=4, n=5$



(d) $m=5, n=2$

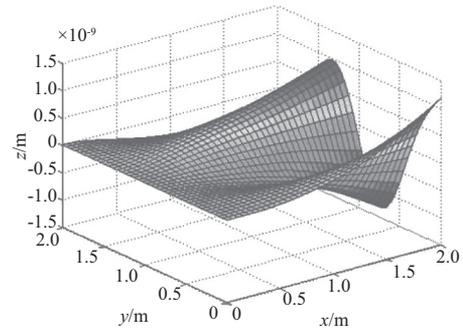


(e) 实际振动

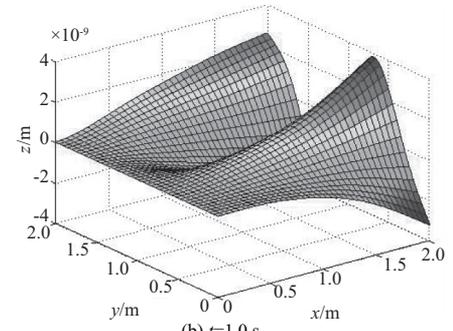
图 2 1 s 时振动模式

图 3 所示是不同时刻的横向变形位移图, 可知作挥舞运动薄板在远离旋转中心的边缘处变形量最大, 需要关注边缘处的疲劳强度。

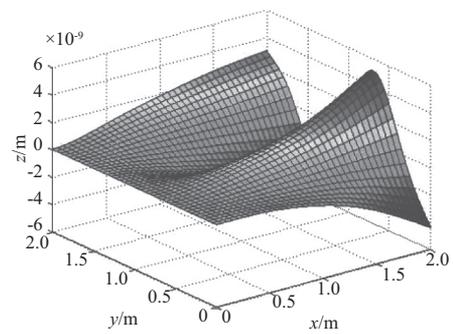
当薄板绕 y 轴挥舞运动的角速度幅值不变且为 20 rad/s 时, 横向磁感应强度的取值依次为 $[0 \text{ T}, 0.1 \text{ T}, 0.2 \text{ T}, 0.3 \text{ T}, 0.4 \text{ T}]$ 时, $x=a$ 时的最大变形如图 4 所示。可知, 发生最大变形时, 边缘的变形曲线都是关于中心对称



(a) $t=0.5 \text{ s}$



(b) $t=1.0 \text{ s}$



(c) $t=1.5 \text{ s}$

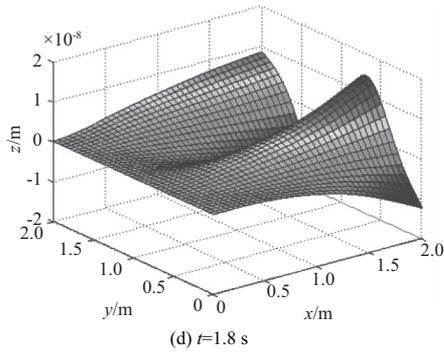
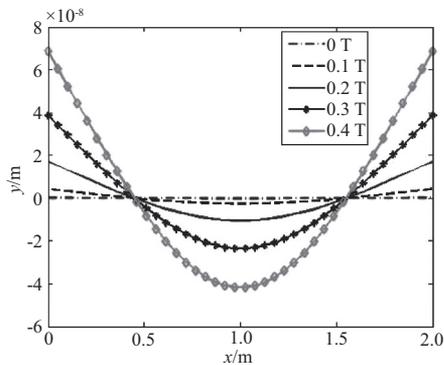


图3 不同时刻的横向变形位移

的,最大变形发生在坐标为(2,0)、(2,2)的角点处。不同的磁感应强度所对应的最大变形位移为 $[1.69 \times 10^{-10}, 4.29 \times 10^{-9}, 1.72 \times 10^{-8}, 3.86 \times 10^{-8}, 6.87 \times 10^{-8}]$,单位为m。可知没有横行磁场时,变形量最小。随着磁感应强度增大,薄板的振动幅值变大。

图4 $x=a$ 处的变形曲线(变形最大的时候)

当横向磁感应强度为定值0.1 T时,薄板绕y轴挥舞运动的角速度幅值变化值取为 $[0, 10, 20, 30, 50]$,单位为 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$,不同的磁感应强度所对应的最大变形位移为 $[0, 4.29 \times 10^{-9}, 1.29 \times 10^{-8}, 2.15 \times 10^{-8}]$,单位是m。可知不旋转时,薄板没有变形。随着角速度增大,薄板的振动幅值变大(图5)。

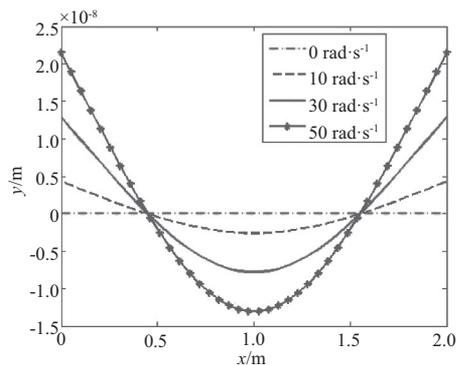


图5 转速和最大变形量的关系

薄板的长宽之比变化时,角速度幅值为10 rad/s时,横向磁感应强度取值0.1 T,长宽比,即 $b/a = [0.1, 0.2, 0.5,$

$0.7, 1.0]$ 。其最大变形如图6所示。不同的长宽比所对应的最大变形位移为 $[3.28 \times 10^{-13}, 5.28 \times 10^{-12}, 2.18 \times 10^{-10}, 8.95 \times 10^{-10}, 4.29 \times 10^{-9}]$,单位是m。可知,随着长宽比增大,薄板的最大振动幅值变大。

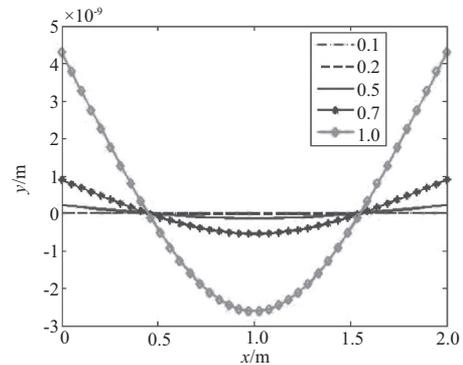


图6 板长和最大变形量的关系

4 结语

利用Hamilton变分原理,建立了在磁场中运动的薄板系统动力学方程。研究了该系统的振动特性。经过分析,得出如下结论:1) 推导了横向磁场中旋转运动薄板的非线性磁弹性振动方程。2) 薄板的振动以1阶振动为主。3) 薄板的振动幅值随着外界横向磁感应强度的增大而增大,随着旋转运动角速度的增大而增大,随着长宽比的增大而增大。4) 本文建立动力学方程的过程,可应用于其他在磁场中作旋转运动的厚板、层合板等。

参考文献:

- [1] H.M. Navazi, S. Bornassi, H. Haddadpour. Vibration analysis of a rotating magnetorheological tapered sandwich beam [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 122: 308-317.
- [2] QIN Y, WANG L, LI Y H. Coupled vibration characteristics of a rotating composite thin-walled beam subjected to aerodynamic force in hygrothermal environment [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 140: 260-270.
- [3] 寇海江,袁惠群. 旋转大变形板振动高阶非线性效应的变分法研究[J]. 振动工程学报, 2015, 28(1): 44-51.
- [4] 张志金. 轴向运动矩形薄板的磁弹性非线性振动[D]. 秦皇岛:燕山大学, 2013.
- [5] XU X, HAN Q, CHU F. Nonlinear vibration of a rotating cantilever beam in a surrounding magnetic field [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2017, 95: 59-72.
- [6] 胡宇达,张明冉. 载流导线间轴向运动导电梁的参数-主共振[J]. 振动与冲击, 2019(14): 1-10, 32.
- [7] 胡宇达,王彤. 磁场中导电旋转圆板的磁弹性非线性共振[J]. 振动与冲击, 2016(12): 177-181.
- [8] 王平,魏星,王知人. 四边简支载流矩形薄板在磁场中的随机分岔[J]. 机械强度, 2016(6): 1143-1148.
- [9] 田振国,梁金奎. 矩形磁流变弹性薄板的动力稳定性分析[J]. 振动工程学报, 2016(1): 125-131.

收稿日期:2020-02-28