DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2021.02.037

# 基于自适应干扰观测器的输出反馈控制器设计

宋欣<sup>a</sup>,王娜<sup>a,b</sup>,何敏<sup>a</sup>

(青岛大学 a.自动化学院; b. 山东省工业控制技术重点实验室,山东 青岛 266071)

摘 要:针对非线性系统存在外部系统参数矩阵未知的情况,设计自适应律估计未知参数矩阵;构造状态观测器及自适应干扰观测器估计出系统状态和外部干扰;利用估计信息,设计基于自适应干扰观测器的输出反馈复合控制器,补偿和抑制外部干扰对系统的影响。通过仿真对自适应干扰观测器与传统干扰观测器的估计效果进行对比分析,验证了该控制方法对改善系统抗干扰能力的有效性。

关键词:千扰补偿与抑制;自适应千扰观测器;H<sub>∞</sub>控制;输出反馈 中图分类号:TP273 文献标志码:B 文章编号:1671-5276(2021)02-0137-06

#### Design of Output Feedback Controller Based on Adaptive Disturbance Observer

SONG Xin<sup>a</sup>, WANG Na<sup>a,b</sup>, HE Min<sup>a</sup>

(a. College of Automation; b. Shandong Key Laboratory of Industrial Control Technology,

Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract: As to the nonlinear systems whose parameter matrix is unknown, an adaptive law is designed to estimate the unknown matrix parameters. A state observer and an adaptive disturbance observer are constructed to estimate system states and exogenous disturbances. With estimated information, an output feedback composite controller based on adaptive disturbance observer is designed to compensate and suppress the effects of exogenous disturbances on the system. In the simulation process, the estimation effects of the adaptive and the traditional disturbance observers are compared. The simulation results show that the proposed control method can fulfill the task of disturbance observation more effectively and accurately with improvement on the anti-disturbance ability of the system.

Keywords: disturbance compensation and rejection; adaptive disturbance observer;  $H_{\infty}$  control; output feedback

## 0 引言

在复杂环境中,影响系统的干扰来自多方面,如测量 噪声、未建模动态、建模误差及外部不同环境的干扰。这 些干扰因素不仅影响系统的控制精度,而且破坏系统的稳 定性。因此,已有文献尝试了许多控制策略,研究系统的 抗干扰控制问题<sup>[1-2]</sup>。

为减少外部干扰对系统的影响,提高系统性能,最直接的办法是测量外部系统产生的干扰,利用干扰的测量值,在控制器中加入前馈补偿,抵消外部干扰对系统的影响。然而,干扰一般是不能直接测量得到的。为解决这个问题,干扰估计已经得到了业内人士的广泛关注,并且提出了许多解决方案,例如扩张状态观测器<sup>[3]</sup>、自适应估计<sup>[4]</sup>和等价输入干扰<sup>[5]</sup>等方法。20世纪80年代末,基于干扰观测器的控制方法(DOBC)被提出并广泛应用于控制系统中。在干扰观测器设计过程中,首要任务是确定观测器增益,使干扰估计误差快速收敛为0。为构造干扰估计动态误差系统,需要获得干扰的导数信息。文献[6]提出一种非线性干扰观测器,该观测器克服了线性观测器在

摩擦补偿、独立关节控制等方面的缺点,在求解稳态误差时,假设干扰的导数为0,满足系统收敛条件,观测器能快速估计干扰。文献[7]提出一种滑模非线性观测器,假设 未知干扰项上界已知,观测器能够在有限时间内估计系统 状态和未知干扰。文献[8]假设外部系统模型中参数矩 阵已知,提出一种基于全维观测器的输出反馈复合抗干扰 控制方法,极大地提高了系统的抗干扰能力。

上述文献假设干扰恒定(或缓慢时变)、有界或参数 矩阵已知,但在实际中很难求取精确的参数矩阵或者保证 干扰在稳定状态下是恒定值。文献[9]提出了一种基于 自适应干扰观测器的控制方法(ADOBC),引入自适应律 估计未知参数矩阵,克服干扰对系统产生影响。此方法与 之前文献提出的方法相比更具实用性。

从上述文献可知,针对参数矩阵未知的外部系统产生 的干扰,在干扰观测器中引入自适应律能很好地解决此问 题。本文针对输入输出皆有非线性和外部干扰的系统,设 计一种基于自适应干扰观测器的输出反馈控制器。构造 自适应律来估计未知参数矩阵,利用得到的估计信息设计 复合控制器,控制器增益和观测器增益用线性矩阵不等式 (LMI)求解,通过仿真验证了本文提出方法可以将外部干

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金项目(61703221);山东省自然科学基金培养基金项目(ZR2016FP10) 第一作者简介:宋欣(1996—),女,山东日照人,硕士研究生,研究方向为挠性飞行器抗干扰控制。 4)

扰准确估计出来,降低外部干扰对系统的影响,提高系统的抗干扰能力。

#### 1 系统动力学模型

考虑以下状态和输出方程均具有非线性和外部干扰 的动态系统<sup>[10]</sup>:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{F}_{01} f_{01}(\boldsymbol{x}(t), t) + \boldsymbol{B}_0 [\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{d}(t)] \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{F}_{02} f_{02}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{D}_0 \mathbf{d}(t)$$
(2)

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{z}} \boldsymbol{x}(t) \tag{3}$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  是状态向量; $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  是控制向量;  $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}'$ 是测量输出向量; $\mathbf{d}(t)$ 是外部系统产生的干扰;  $\mathbf{z}(t)$ 是  $H_{\mathbf{x}}$ 性能参考输出; $\mathbf{A}_0 \mathbf{x} \mathbf{B}_0 \mathbf{x} \mathbf{C}_0 \mathbf{x} \mathbf{D}_0 \mathbf{x} \mathbf{F}_{01} \mathbf{x} \mathbf{F}_{02}$ 和  $\mathbf{C}_z$  是 已知的系统矩阵; $f_{01}(\mathbf{x}(t), t)$ 和  $f_{02}(\mathbf{x}(t), t)$ 是非线性 部分。

假设干扰是由以下外部系统产生的

$$\dot{\boldsymbol{w}}(t) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{w}(t) \tag{(1)}$$

$$\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{w}(t) \tag{5}$$

其中:w(t) $R^{t}$ 是干扰d(t)的状态向量;V是已知矩阵;W是一个具有已知维数的未知有界常实数矩阵,  $||W|| < \varepsilon$ 。

假设1:对于任意的 $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ , j=1,2, 非线性函数

$$2X^{\mathrm{T}}Y \leq \lambda X^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{\lambda}Y^{\mathrm{T}}Y$$

#### 2 自适应干扰观测器设计

控制系统中存在外部干扰,考虑外部系统中参数矩阵 W未知的情况,需要观测器对其进行估计,对x(t)和w(t) 设计状态观测器和干扰观测器如下:

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_{0}\widehat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{F}_{01}f_{01}(\widehat{\boldsymbol{x}}(t), t) + \boldsymbol{B}_{0}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}_{0}\widehat{\boldsymbol{d}}(t) +$$

$$\boldsymbol{K}_{1}[\hat{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{y}(t)]$$
(6)

$$\widehat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_0 \widehat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{F}_{02} f_{02}(\widehat{\mathbf{x}}(t), t) + \mathbf{D}_0 \widehat{\mathbf{d}}(t)$$
(7)

$$\widehat{\boldsymbol{w}}(t) = \widehat{\boldsymbol{W}}\widehat{\boldsymbol{w}}(t) + \boldsymbol{K}_2[\widehat{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{y}(t)]$$
(8)

$$\widehat{d}(t) = V\widehat{w}(t) \tag{9}$$

其中: $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 、 $\hat{\mathbf{d}}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{y}}(t)$ 分别表示 $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{d}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 的估 计值; $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 是观测器的增益矩阵。W的估计值  $\hat{W} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$ ,满足 $\hat{W} = g(\hat{W}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{w}})$ ,之后将会确定自适应 律 $g_0$ 

全维系统可以写成:  

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{W} \boldsymbol{T}_1^T) \boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{F}_1 f_1(\boldsymbol{\eta}(t), t) + \boldsymbol{B} \boldsymbol{u}(t)$$
 (10)  
 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C} \boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{F}_2 f_2(\boldsymbol{\eta}(t), t)$  (11)  
其中: $\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{w}(t) \end{bmatrix}; \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_0 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix};$ 

 $F_{1} = \begin{bmatrix} F_{01} \\ 0 \end{bmatrix}; F_{2} = F_{02}; T_{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} C_{0} & D_{0}V \end{bmatrix};$  $f_{1}(\boldsymbol{\eta}(t), t) = f_{01}(\boldsymbol{x}(t), t); f_{2}(\boldsymbol{\eta}(t), t) = f_{02}(\boldsymbol{x}(t), t),$  $\forall \boldsymbol{x}(t) \exists \boldsymbol{w}(t) \forall t \geq 4 \# \mathcal{M} \text{ and } \mathcal{M} \text{ and } \mathcal{H} \text{ and }$ 

$$\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{W} \boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}}) \,\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t) + \boldsymbol{F}_1 f_1(\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t), t) + \boldsymbol{B} \boldsymbol{u}(t) +$$

$$\boldsymbol{K}(\widehat{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{T}_{1}\widetilde{\boldsymbol{W}}\widetilde{\boldsymbol{w}}(t) \tag{12}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{F}_{2}f_{2}(\boldsymbol{\eta}(t), t)$$
(13)

$$\underbrace{\mathrm{\sharp}}_{\mathbf{w}} = \widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\mathbf{W}} - \widetilde{\mathbf{W}}; \widehat{\boldsymbol{\eta}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \widehat{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix}; \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}; f_1(\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t), t) = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2 + \mathbf$$

 $f_{01}(\hat{\boldsymbol{x}}(t),t);f_{2}(\hat{\boldsymbol{\eta}}(t),t)=f_{02}(\hat{\boldsymbol{x}}(t),t),$ 定义系统的估计误差

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) - \widehat{\boldsymbol{\eta}}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) - \widehat{\boldsymbol{x}}(t) \\ \boldsymbol{w}(t) - \widehat{\boldsymbol{w}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_w \end{bmatrix}$$

那么
$$e(t)$$
的微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{e}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{T}_{1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}_{1}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{T}_{1}\tilde{\boldsymbol{W}\boldsymbol{w}}(t) + \left[\boldsymbol{F}_{1} \quad \boldsymbol{K}\boldsymbol{F}_{2}\right] \begin{bmatrix} f_{1}(\boldsymbol{\eta}(t), t) - f_{1}(\hat{\boldsymbol{\eta}}(t), t) \\ f_{2}(\boldsymbol{\eta}(t), t) - f_{2}(\hat{\boldsymbol{\eta}}(t), t) \end{bmatrix}$$
(14)

根据假设 1,可以证明  

$$\left\| \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{\eta}(t),t) - f_1(\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t),t) \\ f_2(\boldsymbol{\eta}(t),t) - f_2(\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t),t) \end{bmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{U}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_w \end{bmatrix} \right\|.$$
定理 1 自适应律满足

$$\dot{\widehat{W}} = X^{-1} Y C e(t) \widehat{w}^{\mathsf{T}}(t)$$
 (15)  
存在对称正定矩阵 **P**,矩阵 **Y**、**R** 满足

$$T_{1}^{T}P = YC$$
(16)  
sym(PA+PC) +2 $\varepsilon P$ +U  $\lambda_{1}PF_{1} \quad \lambda_{2}RF_{2}$ 

$$\begin{array}{cccc} * & -I & 0 \\ * & * & -I \end{array} \right] < 0 (17)$$

其中:
$$U = \frac{1}{\lambda_1^2} \overline{U}_1^T \overline{U}_1 + \frac{1}{\lambda_2^2} \overline{U}_2^T \overline{U}_2$$
; $K = P^{-1} R_{\circ}$   
证明:选择 Lyapunov 函数

$$\boldsymbol{V}_{1}(t) = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}\left\{t + \frac{1}{\lambda_{1}^{2}}\int_{0}^{t}\left[\parallel\boldsymbol{U}_{1}\boldsymbol{e}_{x}\parallel^{2} - \parallel\tilde{\boldsymbol{f}}_{1}\parallel^{2}\right]\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\lambda_{2}^{2}}\int_{0}^{t}\left[\parallel\boldsymbol{U}_{2}\boldsymbol{e}_{x}\parallel^{2} - \parallel\tilde{\boldsymbol{f}}_{2}\parallel^{2}\right]\mathrm{d}\tau\right\} + \mathrm{tr}\,\tilde{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{W}}$$
(18)

其中: 
$$\tilde{\boldsymbol{f}}_1 = f_1(\boldsymbol{\eta}(t), \tau) - f_1(\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t), \tau)$$
;  $\tilde{\boldsymbol{f}}_2 = f_2(\boldsymbol{\eta}(t), \tau) - f_2(\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t), \tau)$ 。

因此,根据式(16), 
$$V_1(t)$$
的微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{V}}_{1}(t) = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t) \boldsymbol{\varPhi} \boldsymbol{e}(t) + 2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{T}_{1} \tilde{\boldsymbol{W}} \hat{\boldsymbol{w}}(t) + 2 \mathrm{tr} \tilde{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{X} \overset{\dot{\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{W}} + \frac{1}{\lambda_{1}^{2}} \begin{bmatrix} \| \boldsymbol{U}_{1} \boldsymbol{e}_{x} \|^{2} - \| \tilde{\boldsymbol{f}}_{1} \|^{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda_{2}^{2}} \begin{bmatrix} \| \boldsymbol{U}_{2} \boldsymbol{e}_{x} \|^{2} - \| \tilde{\boldsymbol{f}}_{2} \|^{2} \end{bmatrix} + 2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t) \boldsymbol{P} \boldsymbol{F}_{1} \tilde{\boldsymbol{f}}_{1} + 2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t) \boldsymbol{P} \boldsymbol{K} \boldsymbol{F}_{2} \tilde{\boldsymbol{f}}_{2}$$
(19)  
其中

 $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{T}_{1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}_{1}^{\mathrm{T}}) + (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{T}_{1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}_{1}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \text{ ,}$ 根据假设1和引理1,可以证明

$$2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}_{1}\tilde{\boldsymbol{f}}_{1} \leq \lambda_{1}^{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}_{1}\boldsymbol{F}_{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}(t) + \frac{1}{\lambda_{1}^{2}}\tilde{\boldsymbol{f}}_{1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{f}}_{1},$$
  
$$2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}\boldsymbol{F}_{2}\tilde{\boldsymbol{f}}_{2} \leq \lambda_{2}^{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}\boldsymbol{F}_{2}\boldsymbol{F}_{2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}(t) + \frac{1}{\lambda_{1}^{2}}\tilde{\boldsymbol{f}}_{2}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{f}}_{1},$$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_1 = \| f_1(\boldsymbol{\eta}(t), \tau) - f_1\left(\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t), \tau\right) \|^2 , \\ & \tilde{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{f}}_2 = \| f_2(\boldsymbol{\eta}(t), \tau) - f_2\left(\widehat{\boldsymbol{\eta}}(t), \tau\right) \|^2 . \end{aligned}$$

因为 W 是一个常数矩阵,所以  $\dot{W}=0$ ,那么 $\tilde{W}=\dot{W}-\hat{W}=$ 

**-***Ŵ*,得

$$\dot{\mathbf{V}}_{1}(t) = \mathbf{e}^{\mathsf{T}}(t) \boldsymbol{\Phi} \mathbf{e}(t) + 2\mathbf{e}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{T}_{1} \tilde{\boldsymbol{W}} \hat{\boldsymbol{w}}(t) - 2\mathrm{tr} \tilde{\boldsymbol{W}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{X} \tilde{\boldsymbol{W}} + \lambda_{2}^{2} \mathbf{e}^{\mathsf{T}}(t) \boldsymbol{P} \boldsymbol{K} \boldsymbol{F}_{2} \boldsymbol{F}_{2}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{K}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{P} \mathbf{e}(t) + \lambda_{1}^{2} \mathbf{e}^{\mathsf{T}}(t) \boldsymbol{P} \boldsymbol{F}_{1} \boldsymbol{F}_{1}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{P} \mathbf{e}(t) + \frac{1}{\lambda_{1}^{2}} \| \boldsymbol{U}_{1} \boldsymbol{e}_{x} \|^{2} + \frac{1}{\lambda_{2}^{2}} \| \boldsymbol{U}_{2} \boldsymbol{e}_{x} \|^{2}$$
(20)  

$$\mathbb{E} \boldsymbol{\beta} \| \boldsymbol{W} \| < \varepsilon, \boldsymbol{T}_{1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \| \boldsymbol{T}_{1} \boldsymbol{W} \boldsymbol{T}_{1}^{\mathsf{T}} \| \leq \varepsilon, \mathbb{R} \mathbb{H} \mathbb{H} \boldsymbol{\beta} | \mathfrak{P} \mathbb{H}$$
(21)  

$$2, \mathcal{H} \mathfrak{K}(15) \mathcal{H} \mathfrak{K}(16) \mathcal{H} \boldsymbol{\lambda} \mathfrak{K}(20), \mathcal{H} \mathcal{H} \mathfrak{H}$$

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t) \bar{\boldsymbol{U}}_1^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{U}}_1 \boldsymbol{e}(t) + \frac{1}{\lambda_2^2} \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t) \bar{\boldsymbol{U}}_2^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{U}}_2 \boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t) \boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{e}(t)$$
(21)

其中: 
$$\overline{U}_1 = [U_1 \quad 0]$$
;  $\overline{U}_2 = [U_2 \quad 0]$ ;  
 $\Lambda_1 = P(A + KC) + (A + KC)^T P + 2\varepsilon P + \frac{1}{\lambda_1^2} \overline{U}_1^T \overline{U}_1 + \lambda_1^2 P F_1 F_1^T P e(t) + \frac{1}{\lambda_2^2} \overline{U}_2^T \overline{U}_2 + \lambda_2^2 P K F_2 F_2^T K^T P < 0_\circ$ 

不等式  $\Lambda_1 < 0$ ,利用 Schur 补性质可得定理 1 中式 (17),若式(17)成立,则  $\Lambda_1 < 0$ 成立。

# 3 基于自适应干扰观测器的输出反 馈控制器设计

设计复合抗干扰动态输出反馈控制器为

$$\dot{\mathbf{x}}_{k}(t) = \mathbf{A}_{k}\mathbf{x}_{k}(t) + \mathbf{B}_{k}\mathbf{y}_{k}(t) + \mathbf{N}_{k1}f_{01}(\widehat{\mathbf{x}}(t), t) \quad (22)$$
$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}_{k}\mathbf{x}_{k}(t) + \mathbf{D}_{k}\mathbf{y}_{k}(t) + \mathbf{N}_{k2}f_{01}(\widehat{\mathbf{x}}(t), t) - \widehat{\mathbf{d}} \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}} + 2\alpha \boldsymbol{\Theta} < 0 \tag{30}$$

$$\begin{bmatrix} -r\boldsymbol{\Theta} & \boldsymbol{I} \\ * & -r\boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix} < 0 \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}) & \cos\theta(\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}) \\ * & \sin\theta(\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix} < 0 \qquad (32)$$

其中:

$$\boldsymbol{\psi}_{11} = \boldsymbol{A}_{0}\boldsymbol{Q}_{1} + (\boldsymbol{A}_{0}\boldsymbol{Q}_{1})^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_{0}\boldsymbol{C}_{k} + (\boldsymbol{B}_{0}\boldsymbol{C}_{k})^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\psi}_{12} = \boldsymbol{A}_{0} + \boldsymbol{B}_{0}\widehat{\boldsymbol{D}}_{k}\boldsymbol{C}_{0} + \widehat{\boldsymbol{A}}_{k}^{\mathrm{T}};$$

 $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}}(t) = \boldsymbol{C}_{0} \widehat{\boldsymbol{x}}(t) \qquad (24)$ 

其中: $x_k(t)$ 是动态输出反馈控制器的状态; $A_k$ 、 $B_k$ 、

$$\begin{split} & C_k \, \langle D_k \, \langle N_{k1} \, \langle N_{k2} \, \mathbb{B}$$
待定的动态输出反馈控制器系数矩阵。 将控制器带入式(1),得到  $\dot{\mathbf{x}}(t) = (A_0 + B_0 D_k C_0) \mathbf{x}(t) + B_0 C_k \mathbf{x}_k(t) - B_0 D_k C_0 e_x + (F_{01} + B_0 N_{k2}) f_{01}(\mathbf{x}(t), t) - B_0 N_{k2} \tilde{f} + B_0 \tilde{d}(t) \\ & \text{其中}_{\cdot \tilde{f}} = f_{01}(\mathbf{x}(t), t) - f_{01}(\hat{\mathbf{x}}(t), t); \quad \tilde{d}(t) = d(t) - \hat{d}(t) \circ \text{IIII}$ 

$$\dot{\mathbf{x}}_{k}(t) = \mathbf{B}_{k} \mathbf{C}_{0} \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{k} \mathbf{x}_{k}(t) + \mathbf{N}_{k1} f_{01}(\mathbf{x}(t), t) -$$

$$B_k C_0 e_x - N_{k1} \tilde{f} \tag{25}$$

令
$$\boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}_{k}(t) \end{bmatrix}$$
,得到闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{f}_{01}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi}(t), t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}(t) \quad (26)$$
$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}_{z}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{C}_{z}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\xi}(t) \quad (27)$$

$$\begin{split} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Psi} : \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0 \mathbf{D}_k \mathbf{C}_0 & \mathbf{B}_0 \mathbf{C}_k \\ \mathbf{B}_k \mathbf{C}_0 & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}; \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{01} + \mathbf{B}_0 \mathbf{N}_{k2} \\ \mathbf{N}_{k1} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_0 \mathbf{D}_k \mathbf{C}_0 & -\mathbf{B}_0 \mathbf{N}_{k2} & \mathbf{B}_0 \\ -\mathbf{B}_k \mathbf{C}_0 & -\mathbf{N}_{k1} & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

若
$$\delta(t) = 0,$$
则  $\lim_{t \to \infty} \xi(t) = 0$   
若 $\delta(t) \neq 0,$ 则

$$\int_{0}^{z} z^{\mathsf{T}}(s) z(s) \, \mathrm{d}s < \gamma^{2} \int_{0}^{z} \delta^{\mathsf{T}}(s) \delta(s) \, \mathrm{d}s \qquad (28)$$

那么 H<sub>∞</sub>性能指标为 γ 的闭环系统式(26)-式(27) 稳定。

将 $\hat{A}$ 的特征值配置到 LMI 区域 $\mathcal{D}(\alpha, r, \theta)$ 内,存在对称正定矩阵P和 $Q_1$ ,矩阵 $\hat{A}_k \ \hat{B}_k \ \hat{C}_k \ \hat{D}_k \ \hat{N}_{k1} \ \pi \ \hat{N}_{k2}$ , 满足以下条件

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2} & \mathbf{B}_{0} & \mathbf{\lambda}_{3}(\mathbf{F}_{01} + \mathbf{B}_{0}\mathbf{N}_{k2}) & \mathbf{Q}_{1}\mathbf{U}_{3}^{\mathsf{T}}/\lambda_{3} & \mathbf{Q}_{1}\mathbf{C}_{z}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{P}_{1}\mathbf{B}_{0} & \mathbf{\lambda}_{3}(\mathbf{P}_{1}\mathbf{F}_{01} + \widehat{\mathbf{N}}_{k1}) & \mathbf{U}_{3}^{\mathsf{T}}/\lambda_{3} & \mathbf{C}_{z}^{\mathsf{T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{V} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma^{2}\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ * & -\mathbf{I} & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} & 0 \\ * & * & & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$
(29)

$$\boldsymbol{\psi}_{22} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A}_0 + (\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A}_0)^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{C}_0 + (\boldsymbol{B}_k \boldsymbol{C}_0)^{\mathsf{T}};$$
$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{B}_0 \widehat{\boldsymbol{C}}_k & \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{B}_0 \widehat{\boldsymbol{D}}_k \boldsymbol{C}_0 \\ \widehat{\boldsymbol{A}}_k & \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A}_0 + \widehat{\boldsymbol{B}}_k \boldsymbol{C}_0 \end{bmatrix};$$
$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{F}_2^{\mathsf{T}} \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{P}_1 \end{bmatrix} \circ$$

可以得到控制器增益矩阵:

$$N_{k2} = \widehat{N}_{k2}$$
;

$$\boldsymbol{\Lambda}_{2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{\lambda}_{3}^{2} \boldsymbol{P} \boldsymbol{N} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} + \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}_{3}^{2}} \boldsymbol{U}_{3}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_{3} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{z} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{P} \boldsymbol{B} \\ * & -\boldsymbol{\gamma}^{2} \boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$(37)$$

利用 Schur 补性质得

将 $\Lambda_3$ 前乘 diag { $F_1^T$ ,I,I,I},I ,后乘其转置,得式(38)。

其中:

$$\varphi_{11} = A_0 Q_1 + (A_0 Q_1)^{-1} + B_0 D_k C_0 Q_1 + B_0 C_k Q_2^{-1} + (B_0 D_k C_0 Q_1)^{-T} + (B_0 C_k Q_2^{-T})^{-T};$$
  

$$\varphi_{12} = A_0 + B_0 D_k C_0 + (P_1 A_0 Q_1 + P_2 B_k C_0 Q_1)^{-T} + (P_1 B_0 D_k C_0 Q_1 + P_1 B_0 C_k Q_2^{-T} + P_2 A_k Q_2^{-T})^{-T};$$
  

$$\varphi_{22} = P_1 A_0 + (P_1 A_0)^{-T} + (P_1 B_0 D_k C_0)^{-T} + P_2 B_k C_0 + (P_1 B_0 D_k C_0)^{-T} + P_2 B_k C_0 + (P_2 B_k C_0)^{-T};$$
  

$$\Leftrightarrow:$$

$$\boldsymbol{N}_{k2} = \boldsymbol{N}_{k2} ;$$
$$\widehat{\boldsymbol{N}}_{k1} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{N}_{k2} + \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{N}_{k1} ;$$

Λ <sub>3</sub> =	$arphi_{11} pprox pprox$	$arphi_{12} \ arphi_{22}$	$-B_0 D_k C_0 \\ -P_1 B_0 D_k C_0 - P_2 B_k C_0$	$-B_0 N_{k2} \\ -P_1 B_0 N_{k2} - P_2 N_{k1}$	$B_0 \\ P_1 B_0$	$\lambda_{3}(F_{01}+B_{0}N_{k2})$ $\lambda_{3}(P_{1}F_{01}+P_{1}B_{0}N_{k2}+P_{2}N_{k1})$	$Q_1 U_3^{\mathrm{T}} / \lambda_3$ $U_3^{\mathrm{T}} / \lambda_3$	$Q_1 C_z^{\mathrm{T}}$ $C_z^{\mathrm{T}}$	
	*	*	$-\gamma^2 I$	0	0	0	0	0	<0
	*	*	*	$-\gamma^2 I$	0	0	0	0	
	*	*	*	*	$-\gamma^2 I$	0	0	0	
	*	*	*	*	*	-1	0	0	
	*	*	*	*	*	*	-I	0	
	*	*	*	*	*	*	*	-I _	
									(38)

$$\widehat{\boldsymbol{D}}_{k} = \boldsymbol{D}_{k} ;$$

$$\widehat{\boldsymbol{C}}_{k} = \boldsymbol{D}_{k}\boldsymbol{C}_{0}\boldsymbol{Q}_{1} + \boldsymbol{C}_{k}\boldsymbol{Q}_{2}^{\mathrm{T}} ;$$

$$\widehat{\boldsymbol{B}}_{k} = \boldsymbol{P}_{1}\boldsymbol{B}_{0}\boldsymbol{D}_{k} + \boldsymbol{P}_{2}\boldsymbol{B}_{k} ;$$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}_{k} = \boldsymbol{P}_{1}\boldsymbol{A}_{0}\boldsymbol{Q}_{1} + \boldsymbol{P}_{1}\boldsymbol{B}_{0}\boldsymbol{D}_{k}\boldsymbol{C}_{0}\boldsymbol{Q}_{1} + \boldsymbol{P}_{2}\boldsymbol{B}_{k}\boldsymbol{C}_{0}\boldsymbol{Q}_{1} + \boldsymbol{P}_{2}\boldsymbol{A}_{k}\boldsymbol{Q}_{2}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{P}_{2}\boldsymbol{B}_{0}\boldsymbol{C}_{k}\boldsymbol{Q}_{2}^{\mathrm{T}} \circ$$

不等式  $\Lambda_3 < 0$  等同于定理 2 中式(29),若式(29)成 立则 J(t) < 0 成立,那么  $H_\infty$  性能指标为  $\gamma$  的闭环系统式 (26)-式(27)稳定。

根据 LMI 区域极点配置保证系统具有所要求的动态 和稳态性能,将 $\hat{A}$ 的特征值配置到  $\mathcal{D}(\alpha, r, \theta)$  区域内

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + 2\alpha\boldsymbol{P}^{-1} < 0 \qquad (39)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} < 0$$
 (40)

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{P}^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}) & \cos\theta(\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{P}^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}) \\ * & \sin\theta(\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1} + \boldsymbol{P}^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix} < 0$$
(41)

AP

将式(39)前乘  $F_2^{T}$ ,后乘其转置;式(40)和式(41)前 乘 diag { $F_2^{T}$ , $F_2^{T}$ },后乘其转置,等价于定理 2 中的式 (30)、式(31)和式(32),若式(30)、式(31)和式(32)成 立,则 $\overline{A}$ 的特征值属于 $\mathcal{D}(\alpha, r, \theta)$ 区域。

#### 4 仿真结果及分析 考虑具有外部干扰的非线性系统式(1)-式(3)中 1 -1 0 1 1 0 2 0 0 1 $A_0 =$ ; $B_0 =$ 0 0 1 -1 -1 0 0 -2 0 0 -2 -1 2 1 1 2 0 1 0 1 $C_0 =$ $; D_0 =$ 3 4 0 2 -1 5 -2 -1 -3 $C_{r} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]_{\circ}$ 系统模型中的非线性部分假设为: $f_{01}(\mathbf{x}(t),t) = f_{02}(\mathbf{x}(t),t) = \sin(2\pi 5t)\mathbf{x}_2(t)$ ; $\boldsymbol{U}_1 = \text{diag}\{0,1,0,0\}$ , $\boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{U}_3 = \boldsymbol{U}_1;$ $F_{01} = F_{02} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]_{\circ}$ 本系统中干扰由外部系统产生,其参数矩阵 $\begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}$ 0 ,干扰的初始值为 $d_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ 。 W =1 选择控制器的 H。性能等级为 γ=7,定理 2 的 LMI 区域 为 $D(2,20,\pi/6)$ ,选择对称正定矩阵 $X=I_2$ ,系统初始状态为 $x_0 = [-1.2 \quad 1.5 \quad 1.1 \quad -0.8]^{T}$ ,其他参数 $r_1 = 1, r_2 = 1_{\circ}$ 通过 LMI 求得的观测器增益和控制器增益如下: - 2.513 9 3.110 0 - 0.518 2 0.157 5 Y =0.062 2 1.598 6 - 1.069 1 - 0.579 6 - 11.649 2 12.258 2 - 1.714 9 - 4.705 2 - 9.231 6 9.580 0 - 1.477 2 - 3.622 8 $K_{1} =$ - 1.925 8 1.831 6 - 1.765 0 - 0.119 0 4.062 3 - 2.312 2 - 0.210 1 4.166 1 - 0.087 8 1.065 1 - 3.776 6 1.589 2 $K_{2} =$ 6.534 7 - 1.309 4 6.517 8 2.927 6 - 45.568 7 $N_{k2} = \begin{bmatrix} -0.670 \ 9 \\ -0.298 \ 1 \end{bmatrix}$ 10.482 9 $, N_{k1} =$ 16.174 5 0.235 8 -0.80183.954 8 -25.416 4 424.706 7 -8.172 3 -14.339 6 -265.946 4 0.420 6 $A_k =$ -6.740 3 20.971 9 -0.427 8 -0.017 2 0.102 2 -0.190 0 -72.938 1 0.245 5 -59.387 7 -102.625 5 45.977 6 -10.715 1 75.770 2 54.379 2 26.330 3 34.624 7 $\boldsymbol{B}_{k} =$ -2.783 4 -8.474 8 5.864 5 -10.336 9 -7.453 9 -0.529 8 -1.067 6 -7.38620.012 2 0.147 3 -0.074 2 11.328 0 $\boldsymbol{C}_k$ 0.023 1 -0.035 9 -0.444 5 0.674 6 -1.892 4 -3.024 7 0.276 3 -0.895 6 $D_k =$ 0.355 9 -0.169 1 0.721 9 0.263 4 图 1-图 4 分别是系统状态的实际值和估计值,状态

图 1-图 4 分别是系统状态的实际值和估计值,状态 观测器能准确估计系统状态,并且控制器能够使闭环系统 稳定。图 5 和图 6 是外部干扰  $d_1$ 和  $d_2$ 的实际值和估计 值,其中  $d = [d_1^T d_2^T]^T$ 。从图中可以看出在外部系统参数 矩阵未知的情况下自适应干扰观测器能够快速、准确地估





图 7 和图 8 是在假设外部系统的参数矩阵建模不准

确的情况下,即  $W = \begin{bmatrix} 0 & 1.2 \\ -1.2 & 0 \end{bmatrix}$ 时进行仿真。将自适应 干扰观测器与传统干扰观测器的估计效果进行对比,从图 中可以看出自适应干扰观测器可以通过自适应律来调节 运行参数,准确估计外部系统产生的干扰;但是传统的干 扰观测器不能在参数矩阵建模不准确的情况下将干扰准 确估计出来。



### 5 结语

本文针对输入输出皆有非线性和外部干扰的系统,构 造一个自适应干扰观测器来估计外部干扰,应用估计值设 计输出反馈复合控制器,补偿和抑制干扰对系统的影响。 仿真结果表明,在外部系统参数矩阵未知的情况下,基于 自适应干扰观测器的复合控制方法可以有效地抑制外部 干扰,保证系统的稳定性,提高系统抗干扰能力。

#### 参考文献:

- [1] GUO L, CAO S Y. Anti-disturbance control theory for systems with multiple disturbances: a survey[J]. ISA Transactions, 2014, 53(4):846-849.
- [2] 胡庆雷. 挠性航天器姿态机动的主动振动控制[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2006.
- [3] HAN J Q. From PID to active disturbance rejection control[J].
   IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2009, 56 (3): 900-906.
- [4] 夏俊. 基于 RBF 神经网络的无人水面舰艇自适应控制[J]. 机械制造与自动化,2019,48(3):185-188.
- [5] SHE J H, FANG M X, OHYAMA Y, et al. Improving disturbance - rejection performance based on an equivalent - input disturbance approach [ J ]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2008, 55(1): 380-389.
- [6] CHEN W H, BALLANCE D J, GAWTHROP P J, et al. A nonlinear disturbance observer for robotic manipulators[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2000, 47(4):932-938.
- [7] MENON P P, EDWARDS C, GOMES PAULINO N M. Observerbased controller design with disturbance feedforward framework for formation control of satellites [J]. IET Control Theory & Applications, 2015,9(8):1285-1293.
- [8] 李小凤. 基于干扰观测器的挠性航天器时滞控制算法研究 [D]. 北京:北京航空航天大学, 2012.
- [9] HAN J, ZHANG H G, WANG Y C, et al. Anti disturbance control for nonlinear system via adaptive disturbance observer[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(12):2121-2144.
- [10] GUO L, CHEN W H. Disturbance attenuation and rejection for systems with nonlinearity via DOBC approach [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2005, 15(3):109-125.

收稿日期:2020-09-24