

含未知输入的离散线性系统新型递归滤波方法

花玉^a,王娜^{a,b},赵克友^a

(青岛大学 a. 自动化学院; b. 山东省工业控制技术重点实验室, 山东 青岛 266071)

摘 要:在环境监测、导航与控制、故障检测等领域中,由于环境影响、模型参数选取不当、设备故障等原因,系统状态方程中往往含有未知输入。针对受未知影响的系统,在研究的同时估计未知输入和线性系统状态的问题。在没有未知输入先验知识的前提下,针对系统方程中未知输入系数矩阵不满秩时无法应用经典滤波方法的问题,依据线性最小方差无偏估计准则,提出一种三步递归滤波方法,并提炼汇总出具体递归迭代步骤。仿真结果表明,新滤波方法能够有效估计系统状态及未知输入。

关键词:未知输入;最小方差估计;递归三步滤波

中国分类号:TP273 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2021)02-0205-05

Novel Recursive Filtering for Discrete Linear Systems with Unknown Inputs

HUA Yu^a, WANG Na^{a,b}, ZHAO Keyou^a

(a. School of Automation; b. Key Laboratory of Industrial Control Technology,

Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract: In the fields of environmental monitoring, navigation control and fault detection, system and measurement equations both have unknown input due to the environmental impacts, improper selection of model parameters and measurement equipment failures. This paper studies the problem of estimating the state and the unknown input of the linear system simultaneously when the unknown input affects the system equation. Without the prior knowledge of the unknown input, when the unknown input coefficient matrix in the system equation is not of full rank, the classic recursive three-step filter cannot be applied in state estimation. This paper proposes a novel recursive three-step filter according to the linear minimum variance unbiased estimation criterion, and summarizes the specific recursive steps. Simulation results show that the novel filter can estimate the state and the unknown input effectively.

Keywords: unknown input; minimum variance estimation; recursive three-step filter

0 引言

当系统存在过程噪声和测量噪声的情况下,传统卡尔曼滤波器^[1]能递归估计线性系统状态,但是其要求干扰噪声必须是高斯白噪声。因为系统的不确定干扰可能不是白噪声,且某些输入无法测量,因此卡尔曼滤波器的效果有时并不理想。

在系统分析中,未知输入可以表示无法测量的干扰、未建模动态、系统故障等。因此,研究含有未知输入的系统估计问题具有极大意义。这类问题的解决方案在控制系统设计中的干扰抑制^[2-3]、故障检测^[4]、电池状态估计^[5]等许多实际应用中发挥重要作用。

近年来,存在未知输入的滤波器设计问题引起了相当大的关注。根据系统不同,该问题可大致分为两类:带有直通项的滤波器设计^[6-12]和不带直通项的滤波器设计^[13-17],其中关于不带直通项的滤波器设计文献相对较少,具有进一步研究的价值。

最初,解决这类问题的方法是系统状态扩维,将未知输入向量作为系统状态的附加部分,然后对扩维系统应用卡尔曼滤波器。这种方法通常将未知输入假定为常值偏差或某些具有已知统计特性的随机过程^[18],但这些假设在实际应用中可能是无效的。因此,许多研究开始转向存在任意未知输入情况下的系统状态估计问题。解决此类问题的方法通常是通过解耦来实现状态估计。

自从 KITANIDIS P K 开展工作以来,对未知输入估计问题的研究开始转向最优滤波器,其为不带直通项的线性系统,开发了一种最小方差无偏(minimum variance unbiased, MVU)的最优滤波器^[13]。该滤波器通过在不偏条件的约束下将状态协方差矩阵的迹最小化以获得状态估计。该滤波器被文献[14]进一步扩展为一类参数化解决方案。上述文献虽然解决了存在未知输入时的状态估计问题,但没有给出未知输入的估计值。对一些实际问题来说,未知输入的估计值同样重要。文献[16]提出一种鲁棒两段卡尔曼滤波器(robust two-stage kalman filter, RTSKF),首先识别初始时刻未知输入的动态模型,然后用

基金项目:国家自然科学基金项目(61703221);山东省自然科学基金项目(ZR2016FP10)

第一作者简介:花玉(1996—),男,山东临沂人,硕士研究生,研究方向为鲁棒抗干扰滤波器等。

通信作者简介:王娜(1983—),女,山东青岛人,讲师,博士,研究方向为鲁棒抗干扰控制与滤波、飞行器姿态控制等。

识别的模型对未知输入和状态进行估计,其能够给出未知输入的具体估计值,但没有证明所得结果最优。文献[17]提出一种三步迭代滤波器(recursive three-step filter, RTSF),能够同时获得系统状态和未知输入的最小方差无偏估计,并证明了未知输入估计值最优。尽管上述滤波器可以解决存在未知输入下系统状态及未知输入的估计问题,但都有一个前提条件:系统状态方程中未知输入的系数矩阵列满秩。

本文基于 RTSF 思路,提出一种新型三步迭代滤波器(novel recursive three-step filter, NRTSF),在系统状态方程受未知输入影响时估计系统状态和未知输入,该滤波器不需要系统方程中未知输入系数矩阵列满秩,其应用条件比上述滤波器宽松。

1 问题描述

考虑如下带有未知输入的随机线性离散时变系统:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量; $\mathbf{d}_{k-1} \in \mathbf{R}^m$ 是未知输入向量; $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^p$ 是测量输出; $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^p$ 分别是过程噪声和测量噪声,它们为互不相关的零均值白噪声信号,且具有已知非奇异协方差矩阵 $\mathbf{Q}_k = \mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] \geq 0$ 及 $\mathbf{R}_k = \mathbf{E}[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] > 0$; $\mathbf{A}_k$ 、 $\mathbf{G}_k$ 和 $\mathbf{C}_k$ 为已知的适当维数时变矩阵,且 $(\mathbf{A}_k, \mathbf{C}_k)$ 是可观的;初始状态值 $\mathbf{x}_0$ 独立于 $\mathbf{w}_k$ 与 $\mathbf{v}_k$,且已知 $\mathbf{x}_0$ 的无偏估计值 $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}(\mathbf{x}_0)$ 及协方差矩阵 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]$ 。

上述系统的最优滤波问题是已知初始状态 $\mathbf{x}_0$ 的无偏估计值 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 和协方差矩阵 $\mathbf{P}_0$ 的情况下,根据测量序列 $\{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ 依次递归得到未知输入和系统状态的无偏最优滤波序列 $\{\hat{\mathbf{d}}_{0|1}, \dots, \hat{\mathbf{d}}_{k-1|k}\}$ 和 $\{\hat{\mathbf{x}}_{0|1}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\}$ 。

2 NRTSF 设计

GILLIJNS S 在文献[17]中提出的经典 RTSF 可以解决上述系统的状态估计问题,但是使用 RTSF 的前提条件是系统方程中未知输入的系数矩阵 $\mathbf{G}_{k-1}$ 必须满足 $\text{rank}(\mathbf{G}_{k-1}) = m, k=1, 2, \dots$ 。针对系统方程中未知输入系数矩阵不满秩的情况,即 $\text{rank}(\mathbf{G}_{k-1}) = r_k < m$ 时,考虑一种 NRTSF 设计方法,以下是 NRTSF 的推导过程。

假如 $\text{rank}(\mathbf{G}_{k-1}) = r_k \leq m$, 对其进行如下满秩矩阵分解:

$$\mathbf{G}_{k-1} = \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \mathbf{T}_{k-1} \quad (3)$$

其中: $\bar{\mathbf{G}}_{k-1} \in \mathbf{R}^{n \times r_k}$; $\mathbf{T}_{k-1} \in \mathbf{R}^{r_k \times m}$, 且 $\text{rank}(\bar{\mathbf{G}}_{k-1}) = \text{rank}(\mathbf{T}_{k-1}) = r_k$ 。特别是,当 $r_k = m$ 时,可选 $\bar{\mathbf{G}}_{k-1} = \mathbf{G}_{k-1}$, $\mathbf{T}_{k-1} = \mathbf{I}_m$ 。对于任意给定的矩阵 $\mathbf{G}_{k-1}$,必然会存在矩阵 $\bar{\mathbf{G}}_{k-1}$ 、 $\mathbf{T}_{k-1}$ 满足式(3),具体推导过程如下:

$\mathbf{H}_k \in \mathbf{R}^{p \times m}$, 若 $\text{rank}(\mathbf{H}_k) = r_k < m$, 则 $\mathbf{H}_k$ 中存在一个行列式不为 0 的 r_k 阶子式;经过行和列的调换,使其位

于与 $\mathbf{H}_k$ 等秩阵 $\tilde{\mathbf{H}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{11} & \tilde{\mathbf{H}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{21} & \tilde{\mathbf{H}}_{22} \end{bmatrix}$ 的 $\tilde{\mathbf{H}}_{11}$ 块,由于 r_k 阶子

块非奇异, $\tilde{\mathbf{H}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{11} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{H}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_{12} \end{bmatrix}$ 。

换言之,存在非奇异阵 $\mathbf{D}_k \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 和 $\mathbf{F}_k \in \mathbf{R}^{m \times m}$, 使

$$\mathbf{D}_k \mathbf{H}_k \mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{11} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{H}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_{12} \end{bmatrix}, \text{ 进而}$$

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{D}_k^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{11} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{H}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_{12} \end{bmatrix} \mathbf{F}_k^{-1}。$$

其中 $\bar{\mathbf{H}}_k = \mathbf{D}_k^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{11} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{12} \end{bmatrix}$ 与 $\mathbf{T}_k = [\mathbf{I} \quad \tilde{\mathbf{H}}_{11}^{-1} \quad \tilde{\mathbf{H}}_{12}] \mathbf{F}_k^{-1}$ 皆为秩,为 r_k 的满秩阵。

引入虚拟未知输入 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1} = \mathbf{T}_{k-1} \mathbf{d}_{k-1}$, 则 $\mathbf{G}_{k-1} \mathbf{d}_{k-1} = \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \bar{\mathbf{d}}_{k-1}$ 。若已知 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1}$ 的估计值 $\hat{\bar{\mathbf{d}}}_{k-1|k}$, 可得未知输入 $\mathbf{d}_{k-1}$ 的最小方差估计值为

$$\hat{\mathbf{d}}_{k-1|k} = \mathbf{T}_{k-1}^+ \hat{\bar{\mathbf{d}}}_{k-1|k} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{T}_{k-1}^+$ 为 $\mathbf{T}_{k-1}$ 的 Moore-Penrose 逆。

则原系统方程式(1)改写为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \bar{\mathbf{d}}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (5)$$

其中 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1} \in \mathbf{R}^{r_k}$ 为虚拟未知输入向量。

基于新的系统状态方程式(5)和测量方程式(2)设计 NRTSF 如下:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (6)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{d}}}_{k-1|k} = \bar{\mathbf{M}}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{L}}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (8)$$

其中矩阵 $\bar{\mathbf{M}}_k \in \mathbf{R}^{r_k \times p}$ 和 $\bar{\mathbf{L}}_k \in \mathbf{R}^{n \times p}$ 为 NRTSF 的待定增益矩阵。该滤波器第一步为时间更新,在给定测量序列 $\{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}\}$ 时得到 $\mathbf{x}_k$ 的一步预估值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, 详细推导步骤见 2.1 节;第二步得到虚拟未知输入 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1|k}$ 的估计值 $\hat{\bar{\mathbf{d}}}_{k-1|k}$, 矩阵 $\bar{\mathbf{M}}_k$ 的具体表达式及其推导过程见 2.2 节;第三步为测量更新,在给定测量序列 $\{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ 时得到 $\mathbf{x}_k$ 的滤波估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, 推导过程及矩阵 $\bar{\mathbf{L}}_k$ 的具体表达式见 2.3 节。

2.1 时间更新

首先,令 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 表示已知测量序列 $\{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}\}$ 时 $\mathbf{x}_{k-1}$ 的最优无偏估计值,可得一步预估值

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk-1} = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1},$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk-1} \text{ 的协方差矩阵为}$$

$$\mathbf{P}_{klk-1}^x \triangleq \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1}^x \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1},$$

其中: $\mathbf{P}_{klk}^x \triangleq \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{klk} \tilde{\mathbf{x}}_{klk}^T]$; $\tilde{\mathbf{x}}_{klk} \triangleq \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{klk}$ 。

2.2 虚拟未知输入估计

本节考虑虚拟未知输入 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1}$ 的估计。在下文 1) 中得到虚拟未知输入 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1}$ 的无偏估计,同时确定矩阵 $\bar{\mathbf{M}}_k$ 需满足的条件。2) 则进一步确定虚拟未知输入 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1}$ 的最小方差无偏(MVU)估计。

1) 虚拟未知输入的无偏估计

定义新息 $\tilde{\mathbf{y}}_k \triangleq \mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}$,则由式(5)、式(2)与式(6)得

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \bar{\mathbf{d}}_{k-1} + \mathbf{e}_k \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{C}_k (\mathbf{A}_{k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{w}_{k-1}) + \mathbf{v}_k \quad (10)$$

假设 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 无偏,则由式(10)可得 $\mathbf{E}[\mathbf{e}_k] = 0$,进而

由式(9)可得 $\mathbf{E}[\tilde{\mathbf{y}}_k] = \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \mathbf{E}[\bar{\mathbf{d}}_{k-1}]$ 。这表明可以从新息 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 中获得虚拟未知输入 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1}$ 的无偏估计。

定理 1. 假设 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 无偏,则当且仅当 $\bar{\mathbf{M}}_k$ 满足 $\bar{\mathbf{M}}_k \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{G}}_{k-1} = \mathbf{I}_{r_k}$ 时,式(6)-式(7)是 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1}$ 的无偏滤波器。

证明: 该证明与文献[17]中定理 1 的证明相似,因此省略。

由于对应于式(9)的最小二乘解满足定理 1,因此这个最小二乘解无偏。但根据 Gauss-Markov 定理,它不一定是最小方差解,因为在一般情况下

$$\tilde{\mathbf{R}}_k \triangleq \mathbf{E}[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = \mathbf{C}_k (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1}^x \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}) \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{klk-1}^x \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k \neq c\mathbf{I}$$

其中 c 表示正实数。

2) 虚拟未知输入的 MVU 估计

本节将从新息 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 中获得虚拟未知输入 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1}$ 的 MVU 估计,通过加权最小二乘估计确定估计值,其中加权最小二乘估计的加权矩阵为 $\tilde{\mathbf{R}}_k^{-1}$ 。

定理 2. 假设 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 无偏且 $\tilde{\mathbf{R}}_k$ 和 $\mathbf{F}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{F}_k$ 正定,那么当 $\bar{\mathbf{M}}_k = (\mathbf{F}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{F}_k)^{-1} \mathbf{F}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1}$,其中 $\mathbf{F}_k \triangleq \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{G}}_{k-1}$ 时,式(7)为已知新息 $\tilde{\mathbf{y}}_k$ 下 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1}$ 的 MVU 估计,所得虚拟未知输入估计方差为 $\bar{\mathbf{P}}_{k-1|k}^d = (\mathbf{F}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{F}_k)^{-1}$ 。

证明: 该证明与文献[17]中定理 2 的证明相似,因此省略。

2.3 测量更新

考虑通过测量值 $\mathbf{y}_k$ 更新 $\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}$,进而计算增益矩阵 $\bar{\mathbf{L}}_k$,

以得到 MVU 状态滤波器。首先,滤波器需满足 $\mathbf{E}[\hat{\mathbf{x}}_{klk} - \mathbf{x}_k] = 0$,即

$$\mathbf{E}[\hat{\mathbf{x}}_{klk-1} + \bar{\mathbf{L}}_k (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \bar{\mathbf{d}}_{k-1} + \mathbf{C}_k \mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}) - \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \bar{\mathbf{d}}_{k-1} - \mathbf{w}_{k-1}] = 0 \quad (11)$$

因此,当且仅当 $\bar{\mathbf{L}}_k$ 满足

$$\bar{\mathbf{L}}_k \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{G}}_{k-1} - \bar{\mathbf{G}}_{k-1} = 0 \quad (12)$$

对于所有的 $\bar{\mathbf{d}}_{k-1}$,式(8)都无偏。令 $\bar{\mathbf{L}}_k$ 满足式(12),可得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{klk}^x &= (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{L}}_k \mathbf{C}_k) (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1}^x \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}) \times \\ &(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{L}}_k \mathbf{C}_k)^T + \bar{\mathbf{L}}_k \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{L}}_k^T = \bar{\mathbf{L}}_k \tilde{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{L}}_k^T - \\ &\mathbf{P}_{klk-1}^x \mathbf{C}_k^T \bar{\mathbf{L}}_k^T - \bar{\mathbf{L}}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{klk-1}^x + \mathbf{P}_{klk-1}^x \end{aligned} \quad (13)$$

因此可以通过将矩阵 $\mathbf{P}_{klk}^x$ 的迹最小化求得增益矩阵 $\bar{\mathbf{L}}_k$,进而得到 MVU 状态滤波器。

定理 3. 满足无偏条件式(12)且使得协方差矩阵 $\mathbf{P}_{klk}^x$ 的迹最小的增益矩阵 $\bar{\mathbf{L}}_k$ 为

$$\bar{\mathbf{L}}_k = \mathbf{K}_k + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \bar{\mathbf{M}}_k \quad (14)$$

其中 $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{klk-1}^x \mathbf{C}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1}$ 。

证明: 使用拉格朗日乘子法来证明此定理。令拉格朗日式

$$\begin{aligned} &\text{trace}\{\bar{\mathbf{L}}_k \tilde{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{L}}_k^T - 2 \mathbf{P}_{klk-1}^x \mathbf{C}_k^T \bar{\mathbf{L}}_k^T + \mathbf{P}_{klk-1}^x\} - \\ &2 \text{trace}\{(\bar{\mathbf{L}}_k \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{G}}_{k-1} - \bar{\mathbf{G}}_{k-1}) \mathbf{A}_k^T\} \end{aligned} \quad (15)$$

其中: $\mathbf{A}_k \in \mathbf{R}^{n \times r_k}$ 是拉格朗日乘子矩阵;系数“2”是为了符号表示方便。将式(15)关于 $\bar{\mathbf{L}}_k$ 求导并令所求导数为 0,故有

$$\tilde{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{L}}_k^T - \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{klk-1}^x - \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \mathbf{A}_k^T = 0 \quad (16)$$

式(16)和式(12)组成线性系统方程组

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_k & -\mathbf{C}_k \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \\ \bar{\mathbf{G}}_{k-1}^T \mathbf{C}_k^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_k^T \\ \mathbf{A}_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{klk-1}^x \\ \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

则当且仅当该方程组的系数矩阵非奇异时,方程组有

唯一解。设 $\tilde{\mathbf{R}}_k$ 非奇异,那么当且仅当 $\mathbf{F}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{F}_k$ 非奇异时,系数矩阵非奇异。最后,将式(17)两侧左乘系数矩阵的逆,可得式(14),证毕。

将式(14)代入式(8)产生等效状态更新:

$$\hat{\mathbf{x}}_{klk} = \hat{\mathbf{x}}_{klk-1} + [\mathbf{K}_k + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \bar{\mathbf{M}}_k] \times (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{klk-1})$$

将式(14)代入式(13)可得

$$\mathbf{P}_{klk}^x = \mathbf{P}_{klk-1}^x - \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{K}_k^T + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \times \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k}^d \bar{\mathbf{G}}_{k-1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T。$$

2.4 NRTSF 迭代步骤总结

将 NRTSF 总结如下:

1) 时间更新

基于无偏估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ 得到 $k-1$ 时刻至 k 时刻的状

态估计值及相应方差阵:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \\ \mathbf{P}_{k|k-1}^x &= \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1}^x \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \\ 2) \text{ 虚拟未知输入估计}\end{aligned}$$

求 $\mathbf{G}_{k-1}$ 的秩 r_k , 对 $\mathbf{G}_{k-1}$ 作满秩分解 $\mathbf{G}_{k-1} = \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \times \mathbf{T}_{k-1}$ (若 $\mathbf{G}_{k-1}$ 列满秩, 则可取 $\bar{\mathbf{G}}_{k-1} = \mathbf{G}_{k-1}, \mathbf{T}_{k-1} = \mathbf{I}_m$), 计算 k 时刻虚拟未知输入估计值 $\hat{\mathbf{d}}_{k-1|k}$ 及相应方差阵:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{R}}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^x \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k, \\ \mathbf{F}_k &= \mathbf{C}_k \bar{\mathbf{G}}_{k-1}, \\ \bar{\mathbf{M}}_k &= (\mathbf{F}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{F}_k)^{-1} \mathbf{F}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1}, \\ \hat{\mathbf{d}}_{k-1|k} &= \bar{\mathbf{M}}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \\ \mathbf{P}_{k-1|k}^{d-} &= (\mathbf{F}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \mathbf{F}_k)^{-1}.\end{aligned}$$

3) 测量更新

计算 k 时刻状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{klk}$ 及相应方差阵:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1}^x \mathbf{C}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1}, \\ \bar{\mathbf{L}}_k &= \mathbf{K}_k + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \bar{\mathbf{M}}_k, \\ \hat{\mathbf{x}}_{klk} &= \hat{\mathbf{x}}_{klk-1} + \bar{\mathbf{L}}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}), \\ \mathbf{P}_{klk}^x &= \mathbf{P}_{klk-1}^x - \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{R}}_k \mathbf{K}_k^T + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \times \\ &\quad \bar{\mathbf{G}}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k}^{d-} \bar{\mathbf{G}}_{k-1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)^T, \\ \hat{\mathbf{d}}_{k-1|k} &= \mathbf{T}_{k-1}^+ \hat{\mathbf{d}}_{k-1|k} \circ\end{aligned}$$

3 仿真结果分析

为了验证本文提出的 NRTSF 有效性, 本节采用与杜涛^[19]一致的示例进行仿真。

假设线性系统的相关矩阵如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_5, \mathbf{R} = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

仿真中所考虑的未知输入为 $\mathbf{d}_k = [\mathbf{d}_{1k} \ \mathbf{d}_{2k} \ \mathbf{d}_{3k}]^T$, 系统状态为 $\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_{1k} \ \mathbf{x}_{2k} \ \mathbf{x}_{3k} \ \mathbf{x}_{4k} \ \mathbf{x}_{5k}]^T$, 其中 $\mathbf{d}_{1k}$ 、 $\mathbf{d}_{2k}$ 和 $\mathbf{d}_{3k}$ 的具体形式见图 1。

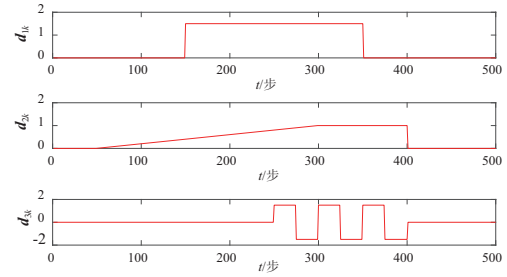


图 1 未知输入 $\mathbf{d}_k$ 的实际值

图 2 是应用 NRTSF 得到的未知输入估计结果图。从中可以看出 NRTSF 能够估计未知输入 $\mathbf{d}_{1k}$ 、 $\mathbf{d}_{2k}$, 但是对未知输入 $\mathbf{d}_{3k}$ 没有估计效果, 造成这一现象的原因是系数矩阵 $\mathbf{G}_k$ 不满秩。因此未知输入 $\mathbf{d}_{3k}$ 没有影响到系统状态, 进而导致量测值中没有未知输入 $\mathbf{d}_{3k}$ 的信息。

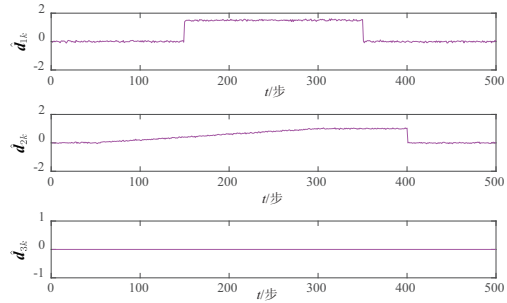


图 2 未知输入 $\mathbf{d}_k$ 的估计值

图 3 和图 4 分别是应用 NRTSF 得到的系统状态的估计结果图和系统状态估计误差结果图, 由于未知输入分别加在前 3 个系统状态分量, 所以图中分别给出了前 3 个系统状态 $\mathbf{x}_{1k}$ 、 $\mathbf{x}_{2k}$ 和 $\mathbf{x}_{3k}$ 的真实值、估计值以及估计误差, 由图 3 和图 4 可以看出状态估计值都能够跟踪状态真实值。

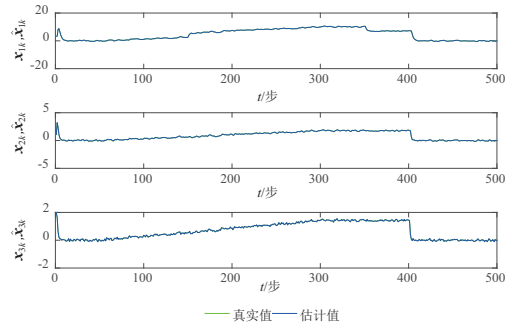


图 3 系统状态及其估计值

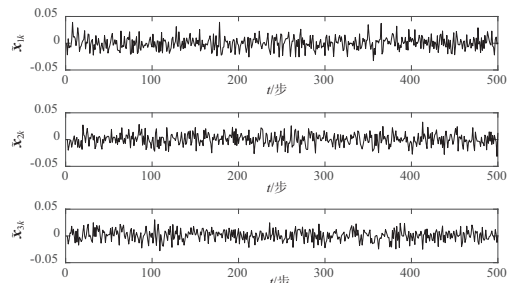


图 4 系统状态估计误差

4 结语

本文针对系统方程含有未知输入的情况,讨论了同时估计未知输入和状态的问题,针对经典滤波器的不足,提出一种新的三步迭代滤波器,其可以解决系统方程中未知输入系数矩阵不满秩时,经典滤波器无法使用的问题。仿真结果表明,新滤波器能够有效估计未知输入及系统状态。

参考文献:

- [1] KALMAN R E. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. Journal of Basic Engineering, 1960, 82(1): 35-45.
- [2] GAO Z Q. On the centrality of disturbance rejection in automatic control[J]. ISA Transactions, 2014, 53(4): 850-857.
- [3] GUO L, CAO S Y. Anti-disturbance control theory for systems with multiple disturbances: a survey[J]. ISA Transactions, 2014, 53(4): 846-849.
- [4] CHEN J, PATTON R J. Optimal filtering and robust fault diagnosis of stochastic systems with unknown disturbances[J]. IEE Proceedings-Control Theory and Applications, 1996, 143(1): 31-36.
- [5] 邹峰, 陈则王. 基于改进扩展卡尔曼滤波算法的锂离子电池荷电状态估计[J]. 机械制造与自动化, 2017, 46(5): 130-133.
- [6] LI W, PAN J, LI Y, et al. A kalman filtering for linear discrete-time system with unknown inputs[C]. Proceedings of the 30th China Control and Decision Conference, 2018.
- [7] YONG S Z, ZHU M H, FRAZZOLI E. A unified filter for simultaneous input and state estimation of linear discrete-time stochastic systems[J]. Automatica, 2016, 63: 321-329.
- [8] SUNDARAM S, HADJICOSTIS C N. Optimal state estimators for linear systems with unknown inputs[C]// Proceedings of the 45th IEEE on Decision and Control, San Diego, CA, USA: IEEE, 2006: 4763-4768.

- [9] PAN S W, SU H Y, WANG H, et al. The study of joint input and state estimation with Kalman filtering[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2011, 33(8): 901-918.
- [10] YONG S Z, ZHU M H, FRAZZOLI E. Simultaneous input and state estimation for linear discrete-time stochastic systems with direct feedthrough[C]// 52nd IEEE Conference on Decision and Control. Firenze, Italy: IEEE, 2013: 7034-7039.
- [11] WANG H K, ZHAO J, XU Z H, et al. Input and state estimation for linear systems with a rank-deficient direct feedthrough matrix[J]. ISA Transactions, 2015, 57: 57-62.
- [12] GILLIJNS S, DE MOOR B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems[J]. Automatica, 2007, 43(1): 111-116.
- [13] KITANIDIS P K. Unbiased minimum-variance linear state estimation[J]. Automatica, 1987, 23(6): 775-778.
- [14] DAROUACH M, ZASADZINSKI M. Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs[J]. Automatica, 1997, 33(4): 717-719.
- [15] KERWIN W S, PRINCE J L. On the optimality of recursive unbiased state estimation with unknown inputs[J]. Automatica, 2000, 36(9): 1381-1383.
- [16] HSIEH C S. Robust two-stage Kalman filters for systems with unknown inputs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(12): 2374-2378.
- [17] GILLIJNS S, DE MOOR B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems[J]. Automatica, 2007, 43(1): 111-116.
- [18] KELLER J Y, DAROUACH M, CARMELLE L. Kalman filter with unknown inputs and robust two-stage filter[J]. International Journal of Systems Science, 1998, 29(1): 41-47.
- [19] 杜涛. 抗干扰滤波方法及在偏振组合导航系统的应用研究[D]. 南京: 东南大学, 2016.

收稿日期: 2020-09-16

(上接第 175 页)

参考文献:

- [1] 王甲甲, 程志强, 张伏, 等. 果园采摘机械手研究现状综述[J]. 农机化研究, 2020, 42(5): 258-262.
- [2] 黄思姬, 欧屹, 陶卫军, 等. 履带式地面移动机器人动力学模型分析[J]. 机电工程, 2011, 28(3): 280-285.
- [3] LIU Y G, LIU G J. Modeling of tracked mobile manipulators with consideration of track terrain and vehicle manipulator interactions[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2009, 57(11): 1065-1074.
- [4] 辛洪兵, 乔绪维, 陈美钰, 等. 网络机器人控制系统中异构机器人接入技术的研究[J]. 制造业自动化, 2009, 31(7): 19-21, 24.
- [5] PENG J Z, YANG Z Q, WANG Y N, et al. Robust adaptive motion/force control scheme for crawler-type mobile manipulator with nonholonomic constraint based on sliding mode control

approach[J]. ISA Transactions, 2019, 92: 166-179.

- [6] YAMAMOTO Y, YUN X P. Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39(6): 1326-1332.
- [7] 卞永明, 杨濛, 刘宇超, 等. 履带式移动机器人轨迹跟踪控制技术[J]. 中国工程机械学报, 2018, 16(3): 189-193, 206.
- [8] 刘庆雪, 刘宁, 公茂法. 控制感应加热电源功率稳定的模糊控制方法[J]. 制造技术与机床, 2007(10): 56-59.
- [9] 董凡梅. 履带式移动机械手路径规划与运动控制[D]. 天津: 天津理工大学, 2012.
- [10] 罗进生, 袁喜林, 赵凯, 等. 模糊 PID 控制在伺服系统中的应用[J]. 机械设计与制造, 2013(5): 229-231, 234.

收稿日期: 2020-09-28