

基于旋量理论的 7 自由度机械臂运动学建模与分析

李冠琦, 武建德, 李瑞琴

(中北大学 机械工程学院, 山西 太原 030051)

摘要:机械臂模仿人手臂的 7 自由度会拥有冗余自由度。基于旋量理论计算 7 自由度机械臂的正向运动学解,从数值上验证矩阵指数先分块展开比直接泰勒展开准确。用 Newton-Raphson 数值迭代法求逆解。通过编写 Matlab 程序对正逆解互相验证。研究发现逆解的求解有适用范围,较之传统的 D-H 法,使用 0 螺距的螺旋轴,会使建模更加简洁。

关键词:旋量;机械臂; Newton-Raphson 数值迭代法

中图分类号:TP241 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2022)01-0105-03

Kinematics Modeling and Analysis of Seven-degree-freedom Robotic Arm Based on Spinor Theory

LI Guanqi, WU Jiande, LI Ruiqin

(Institute of Mechanical Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: The robotic arm mimicking the 7 DOF of the human arm will have redundant degrees of freedom. The forward kinematic solution of the seven-DOF robotic arm is calculated based on the spinor theory, and it is verified numerically that the matrix exponential first block expansion is more accurate than the direct Taylor expansion. The Newton-Raphson numerical iteration method is used to find the inverse solution. The forward and inverse solutions are verified against each other by writing a matlab program. It is found that there is a range of applicability for the inverse solution, and the use of a 0-pitch spiral axis results in a more concise modeling than the traditional D-H method.

Keywords: spinor theory; robotic arm; Newton-Raphson numerical iterative method

0 引言

机械臂是机器人技术领域中应用最为广泛的自动化装置,在工业制造、医疗康复等领域都有其应用实例,拟人化机械臂技术也逐渐成熟^[1-4]。匹兹堡大学生物医学团队在 BCI 机械臂假肢里引入实时触觉反馈,使完成任务的时间减少一半。波士顿动力开发 Stretch 移动式 7R 机械臂已应用于仓库运输。

20 世纪 80 年代学者们开始讨论将旋转轴从数学中引入机器人研究的可行性,旋量理论^[5-9]日益成熟,然而对其的应用介绍却鲜见报道。本文建模 7 自由度串联机械臂,着重对螺旋轴这一单位矢量在运动学的应用加以详细描述。

6 自由度逆解有通用公式,7R 逆解包含 32 个实根,出现虚空间或自运动歧。7R 逆解可结合 Newton-Raphson 数值迭代法求解^[10]。

使用 Matlab 进行正解中的化简与直接展开等运算过程的比较,并且同时使用开源 Python 对结果进行比较。使用基于空间(space 简称 s)坐标系的空间雅可比矩阵,找出数值迭代法求逆解的适用范围,基于正解的前提下,验证逆解的准确性。

1 旋量理论

螺旋(旋量——旋转向量)理论在正运动学中的应用。

1.1 M 矩阵(0 位置、起始位置)

M 矩阵为当所有的关节转角都为 0 的时候,操作空间坐标系(body 简称 b)在 s 坐标系中的位置和姿态矩阵。

1.2 旋转向量 \vec{S} 与指数积公式

将每一个转动关节视为 0 螺距的轴,假设除了最后一个关节转动 θ° 外,其他关节都是固定的。在 s 坐标系里,关节 7 上螺旋轴的向量形式如式(1)所示,在高维度上, R^n 是 n 维的欧几里得空间, $\vec{S}_7 \in R^6$, $\vec{\omega}_7 \in R^3$, $\vec{V}_7 \in R^3$ 。螺旋轴的矩阵形式 S_7 如式(2)所示。

$$\vec{S}_7 = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_7 \\ \vec{V}_7 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$S_7 = \begin{bmatrix} \omega_7 & \vec{V}_7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$T_{07} = e^{S_7 \theta} M \tag{3}$$

基金项目:山西省自然科学基金项目(201801D121183);山西省重点研发计划项目(201803D421028;201903D421051)

第一作者简介:李冠琦(1996—),男,山西吕梁人,硕士研究生,研究方向为康复机器人机构。

特殊正交群是所有有效的 3×3 旋转矩阵的集合群 $S_0(3)$:包括 $R, \omega, e^{\omega\theta}$ 。特殊的欧几里得集合群或刚体运动群或 R^3 中的同质变换矩阵 $S_e(3)$ 表示位姿:包括 $M, e^{S\theta}, T_{07}$ 。

$$e^{S\theta} = I + S\theta + S^2 \frac{\theta^2}{2!} + S^3 \frac{\theta^3}{3!} + \dots = \begin{bmatrix} e^{\omega\theta} & f(\theta)\mathbf{v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(4)中,可利用特性 $\omega^3 = -\omega$ 来化简,且 $e^{\omega\theta}$ 有 Rodrigues 公式:

$$f(\theta) = I\theta + (1 - \cos\theta)\omega + (\theta - \sin\theta)\omega^2 \quad (5)$$

$$e^{\omega\theta} = I + \sin\theta\omega + (1 - \cos\theta)\omega^2 \quad (6)$$

依次解锁一个角度,往前代值,得到

$$T_{07} = e^{S_1\theta_1} \dots e^{S_7\theta_7} M \quad (7)$$

2 数值法逆解

使用非线性寻根的 Newton-Raphson 方法,有寻根、不存在根时寻找近似解、存在多个解时寻找最优解的优势。给定一个初始值,然后代入迭代式求解直到出现误差范围内的解。

设正向运动学函数为 $f(\theta_d)$, 末端执行器的位置向量为 \mathbf{v} , 非线性寻根 Newton-Raphson 是找到目标函数的解。几何视角如图 1 所示;式(8)是解析视角。式(9)-式(11)是计算雅可比矩阵。

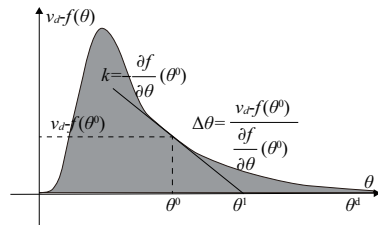


图 1 迭代法几何过程

$$\Delta\theta = J^{-1}(\theta^i) [\mathbf{v}_d - f(\theta^i)] \quad (8)$$

$$J_s(\theta) = [J_{S1}(\theta_1) \quad J_{S2}(\theta_2) \quad \dots \quad J_{Sn}(\theta_n)] \quad (9)$$

$$J_{S1}(\theta_1) = \vec{S}_1 \quad (10)$$

$$J_{Si}(\theta_i) = [e^{S_1\theta_1} \dots e^{S_{i-1}\theta_{i-1}}] * \vec{S}_i \quad (11)$$

式中*为其伴随矩阵。

对这种算法的进一步改进:

1)末端执行器的位置描述 $f(\theta_d)$ 变更为正运动学计算出的矩阵 T_{07} 。

2)误差调整。用螺旋轴 S_{MT} 两分量的模代替末端执行器每次迭代的位置变化。

3)引进伪逆矩阵 J^\dagger 避免求解奇异时无解的情况。在 Matlab 里编程为 pinv(J)。

当前基于 b 坐标系,变换为基于 s 坐标系:

$$\vec{S}_{MT_b} = \log(T_{MT_{07}}(\theta^i)) \quad (12)$$

$$\vec{S}_{MT_s} = (T_{sb}) * \vec{S}_{MT_b} \quad (13)$$

式中: T_{sb} 是坐标转移矩阵; * 为求其伴随矩阵。

改进算法的流程图如图 2 所示。

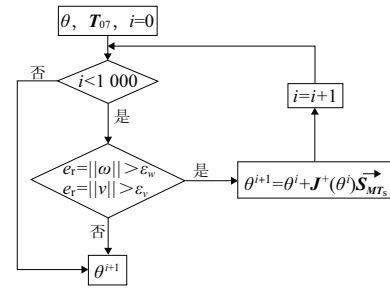


图 2 改进的数值迭代法流程图

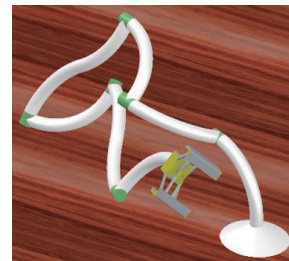
3 验证正逆解

3.1 正运动学方程

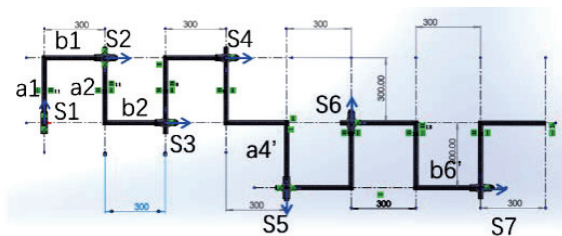
绘制三维模型图,并建立 7R 示意图(图 3)进行验证。如图 3(b)所示的坐标平面, y 方向定义为 a 并依次标号, z 方向定义为 b 也依次序标号。标示 7 个螺距为 0 的右手螺旋轴 $\vec{S}_1 \rightarrow \vec{S}_7$ 。

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\vec{S}_7 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad -a_7 \quad 0 \quad 0]^T = [0 \quad 0 \quad 1 \quad -300 \quad 0 \quad 0]^T \quad (15)$$



(a) 7R模型图



(b) 7R示意图

图 3 三维模型图及 7R 示意图

根据式(3),使用矩阵分块后化简的运算过程,编程并计算结果。

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} c_7 & -s_7 & 0 & -2700s_7 \\ s_7 & c_7 & 0 & 2700c_7 - 300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

根据式(3),发现将矩阵指数直接泰勒展开(采用了 3 种计算方法: Pada 法、特征值法、6 次的泰勒展开)得出的

结果虽然一致,但是它是虚数形式,增加了计算量。结果:

$$T_{M_pauli}(\theta) = \begin{bmatrix} c_7 & -s_7 & 0 & -2\ 700s_7 \\ s_7 & c_7 & 0 & 1\ 350e^{-\theta_7 i} + 1\ 350e^{\theta_7 i} - 300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

使用先进行矩阵分块然后利用特性化简的运算方法,该结果更准确,后期的运算量更小。代入式(7),使用该方法分别在 Matlab 和 Python 中运算,得出的结果一致:

$$T = \begin{bmatrix} c_{5-6}c_{1234}c_7 - s_{1234}c_7 & -s_{1234}c_7 - c_{5-6}c_{1234}s_7 & -s_{5-6}c_{1234} & r1 \\ c_{1234}s_7 + c_{5-6}s_{1234}c_7 & c_{1234}c_7 - c_{5-6}s_{1234}s_7 & -s_{5-6}s_{1234} & r2 \\ s_{5-6}c_7 & -s_{5-6}s_7 & c_{5-6} & r3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r1 = 150s_{1234-5} - 1\ 350s_{12347} - 300s_{123} - 675s_{123457-6} - 675s_{123467-5} - 150s_{12345} - 1\ 350s_{1234-7} + 600s_{1234} + 300s_{12} + 675s_{12345-6-7} + 675s_{12346-5-7} - 300s_1 + 750s_{12345-6} - 750s_{12346-5}$$

$$r2 = 150c_{1234-5} + 1\ 350c_{12347} + 300c_{123} + 675c_{123457-6} + 675c_{123467-5} - 150c_{1234-5} + 1\ 350c_{1234-7} - 600c_{1234} - 300c_{12} - 675c_{12345-6-7} - 675c_{12346-5-7} + 300c_1 - 750c_{12345-6} + 750c_{12346-5}$$

$$r3 = 2\ 700s_7c_5s_6 - s_5c_6 - 1\ 500s_5s_6 - c_5(1\ 500c_6 - 1\ 500) - 1\ 200c_5 + 1\ 200$$

3.2 逆运动学方程

1) 第一次验证

设初始位置为正解的 0 位置,转动角度为 θ_{list} 。

$$\theta_{list} = \left[\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{7} \right] =$$

[3.142; 1.571; 1.047; 0.785; 0.628; 0.524; 0.449]

给逆解的初始值 [3, 1.5, 1, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3]。解得

[3.161, 1.563, 1.059, 0.762, 0.628, 0.523, 0.449]。

2) 第二次验证

因发现误差较大:1)改用角度制;2)迭代次数增加到 1 000 次;3)精度调整为 $e_w < 0.000\ 1$, $e_v < 0.000\ 1$ 。经过多组数据实验发现,相差 3°以内,位置完全重现;相差 10°以内,第一角度有 0.1°的偏差;相差 15°以上的逆运算,第一个角度有 1°以上的偏差。所以,该方法求逆解有完全重现的适用范围,需要把初始解猜测在真实解的附近 15°以内(表 1)。

表 1 正逆解相互验证 单位:(°)

验证项目	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	$\Delta\theta$
初始角度	10	20	30	40	50	60	70	—
猜测角度	7	17	27	37	47	57	67	0
计算的逆解	10	20	30	40	50	60	70	0
猜测角度	6	16	26	36	46	56	66	0.001
计算的逆解	10.001	20.001	29.999	39.999	50	60	70	0.001
猜测角度	1	11	21	31	41	51	61	0.060
计算的逆解	10.06	20.032	29.949	39.959	50	60	70	0.060
猜测角度	0	10	20	30	40	50	60	0.100
计算的逆解	10.1	20.053	29.916	39.932	50	60	70	0.100
猜测角度	-5	5	15	25	35	45	55	0.740
计算的逆解	10.74	20.403	29.373	39.484	50	60	70	0.740

续表 1

验证项目	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	$\Delta\theta$
猜测角度	-6	4	14	24	34	44	54	1.030
计算的逆解	11.03	20.566	29.128	39.276	50	60	70	1.030
猜测角度	-13	-3	7	17	27	37	47	6.728
计算的逆解	26.728	24.467	24.375	34.429	50	60	70	6.728
猜测角度	-15	-5	5	15	25	35	45	14.466
计算的逆解	24.466	33.103	18.257	24.173	50	60	70	14.466
猜测角度	-16	-7	4	14	24	34	44	53.432
计算的逆解	63.432	-26.264	-22.725	85.557	50	60	70	53.432

4 结语

本文重点介绍了如何使用形如螺旋楼梯的转向量计算正逆解。结合旋量与 Newton-Raphson 数值法求逆解。为涵盖转动机构可能出现的问题,采用目前串联机构中最复杂的 7R 机构并且使机构尽可能复杂,但是设计中没有涵盖 helical 螺旋和 cylindrical 圆筒等机构。在比较了不同的运算方法后,计算正解,得出先将矩阵分块,再利用特性化简的方法更好的结论。在计算逆解的过程中,发现当初猜测的第一个角度超过真实解 20°, Newton-Raphson 数值法不会重现正解。验证结果表明旋量形式美观,建模快捷,编程明了,适用于机械臂中的串联机构、并联机构、转动关节、平动关节、螺旋关节等的运动学、动力学特性建模和分析。

参考文献:

- [1] FLESHER S N, DOWNEY J E, WEISS J M, et al. A brain-computer interface that evokes tactile sensations improves robotic arm control[J]. Science, 2021, 372(6544): 831-836.
- [2] KEVIN M L, FRANK C P. Modern robotics: mechanics planning and control[M]. Illinois: Cambridge University Press, 2017.
- [3] 刘世平,曹俊峰,孙涛,等.基于 BP 神经网络的冗余机械臂逆运动学分析[J].中国机械工程, 2019, 30(24): 2974-2977, 2985.
- [4] 赵京,王鑫,张自强,等.基于肘部自运动的主从异构 7 自由度机械臂运动映射及其几何逆解[J].机械工程学报, 2020, 56(15): 181-190.
- [5] YOU W S, LEE Y H, OH H S, et al. Design of a 3D-printable, robust anthropomorphic robot hand including intermetacarpal joints[J]. Intelligent Service Robotics, 2019, 12(1): 1-16.
- [6] BINDU R A, NELOY A A, ALAM S, et al. Sigma-3: Integration and analysis of a 6 DOF robotic arm configuration in a rescue robot[C]//2019 4th International Conference on Robotics and Automation Engineering (ICRAE). Singapore: IEEE, 2019: 6-11.
- [7] 常健,王亚珍,李斌.基于力/位混合算法的 7 自由度机械臂精细操控方法[J].机器人, 2016, 38(5): 531-539.
- [8] 张昌,武玉强.基于 P-Rob 六自由度机械臂运动学建模与仿真[J].包装工程, 2020, 41(11): 166-173.
- [9] WIEDMEYER W, ALTOÉ P, AUBERLE J, et al. A real-time-capable closed-form multi-objective redundancy resolution scheme for seven-DoF serial manipulators[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2021, 6(2): 431-438.

收稿日期: 2021-04-01