DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2022.05.002

线性离散系统状态和未知干扰的递归滤波算法研究

徐迎菊[a]，王娜[a,b]，花玉[a]
（青岛大学 a. 自动化学院；b. 山东省工业控制技术重点实验室，山东 青岛 266071）

摘　要：研究了具有未知干扰、量测缺失和相关噪声的线性离散系统状态和未知干扰同时估计问题。用服从 Bernoulli 分布的随机序列模拟量测信息丢失的过程；系统过程噪声与量测噪声相互关联的情形用 Kronecker delta 函数表示。依据线性无偏最小方差的估计准则，设计一种能同时估计未知干扰和线性系统状态的递归滤波器；运用拉格朗日乘子法和矩阵对角理论知识推导计算滤波器中待定增益矩阵进而最小化估计误差协方差；通过数值仿真验证了该滤波算法的有效性。

关键词：未知干扰；量测缺失；相关噪声；矩阵不满秩；最小方差无偏估计

中图分类号：TP273　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-5276(2022)05-0008-04

Recursive Filtering Algorithm for State and Unknown Disturbance of Linear Discrete Systems

XU Yingju[a], WANG Na[a,b], HUA Yu[a]
(a. College of Automation; b. Shandong Key Laboratory of Industrial Control Technology, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract: The problem of simultaneous estimation of unknown disturbances and states for linear discrete-time systems with unknown disturbances, missing measurements and correlated noises is studied. The process of missing measurement is simulated by a random sequence subordinated to Bernoulli distribution. Kronecker delta function is used to describe the correlation between process noise and measurement noise. According to the estimation criterion of linear unbiased minimum variance, a recursive filter is designed, which can estimate the unknown disturbances and the state of the linear system simultaneously. The estimation error covariance is minimized by Lagrange multiplier method and with matrix diagonal theory to deduce the unknown gain matrix in the filter. Numerical simulation is conducted to verify the effectiveness of the filtering oalgorithm.

Keywords: unknown disturbance; missing measurement; correlation noise; nun-full rank matrix; minimum variance unbiased estimation

0　引言

在工业和机械制造业的控制系统中，动态系统的状态是否可以被精准估计，将会影响系统运行的准确性、快速性与稳定性，如故障检测与诊断[1]、机动目标跟踪[2]、机器人技术[3]和锂离子电池荷电状态估计[4]等。与此同时，由于环境影响、模型参数选取不当、设备故障等原因，实际控制系统往往存在一些先验知识未知的干扰。针对随机系统未知干扰和状态估计问题，文献[5]提出递归状态滤波器，在没有先验知识未知干扰的条件下进行状态估计。基于滤波器存在的充要条件，文献[6]将递归滤波器设计扩展到一般的线性组合当中，得到一般线性最小方差无偏估计，并证明其与线性递归滤波器都具有最优解，保证了全局最优性。文献[4-6]仅考虑系统状态方程中含有未知干扰时对系统状态估计的影响，并且要求未知干扰的系数矩阵满足列满秩的条件。而文献[7]则提出一种新的三步迭代滤波器，可以解决系统方程中未知干扰系数矩阵不满秩时，经典滤波器无法使用的问题，然后将未知观测干扰考虑到系统量测方程中，形成新的带直通项的系统模型。文献[8]考虑了未知干扰和线性离散系统状态的同时估计问题，提出一种稳定性滤波算法，并对算法的稳定性条件及有效性进行了相应的分析。

上述研究均未考虑系统发生量测数据丢失和噪声相关的情况。在无线传感网络中，由于传感器故障、网络拥塞等现象的存在会导致测量数据的丢失。文献[9]提出用服从伯努利分布的随机序列来描述量测缺失的现象，并基于该描述对各种状态估计（滤波）和控制问题进行了有效的研究。特别是在实际工程应用中，还应将系统过程噪声和量测噪声相互关联的问题[10]考虑到系统状态估计中。因此，文献[11]提出了一种基于矩阵理论运算的理想滤波器。但是推导这种滤波算法的前提条件是量测方程中未知干扰的系数矩阵列满秩，所得结论仍具有一定的局限性。在实际应用中，系数矩阵可能不满足列满秩条件。

针对量测方程中未知干扰系数矩阵不满秩的线性离散系统，考虑其量测缺失和噪声相关的情况，本文构造了能同时估计未知干扰和系统状态的递归滤波器，通过拉格朗日乘子法将待定增益矩阵的求取转换成带约束条件的

基金项目：国家自然科学基金资助项目(61703221)；山东省自然科学基金资助项目(ZR2016FP10)
第一作者简介：徐迎菊(1995—)，女，山东菏泽人，硕士研究生，研究方向为抗干扰滤波等。

优化问题,同时运用矩阵对角理论知识直接推导计算滤波器中待定的增益矩阵,使估计误差协方差最小,满足了线性最小方差无偏估计的要求,并用数值仿真验证了该滤波算法的有效性。

1　问题描述

考虑具有未知干扰和量测缺失的一般线性离散系统:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{w}_k \\ y_k &= \delta_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{v}_k \end{aligned} \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{x}_k\in\boldsymbol{R}^{n_x}$是系统状态向量;$u_k\in\boldsymbol{R}^{n_u}$是未知干扰;$\boldsymbol{y}_k\in\boldsymbol{R}^{n_y}$是测量输出;$\boldsymbol{w}_k\in\boldsymbol{R}^{n_x}$是过程噪声;$\boldsymbol{v}_k\in\boldsymbol{R}^{n_y}$是量测噪声;$\delta_k$为随机变量;$\boldsymbol{A}_k\in\boldsymbol{R}^{n_x\times n_x}$、$\boldsymbol{B}_k\in\boldsymbol{R}^{n_x\times n_u}$、$\boldsymbol{C}_k\in\boldsymbol{R}^{n_y\times n_x}$和$\boldsymbol{D}_k\in\boldsymbol{R}^{n_y\times n_u}$表示具有适当维数的已知矩阵。

当量测方程中出现未知干扰时,往往假定其系数矩阵是满秩的。此时假设未知干扰前的系数矩阵不满秩,$\operatorname{rank}(\boldsymbol{D}_k)=\boldsymbol{r}_k\leqslant\boldsymbol{n}_u$,$\boldsymbol{D}_k\in\boldsymbol{R}^{n_y\times n_u}$,对$\boldsymbol{D}_k$进行满秩分解

$$\boldsymbol{D}_k=\bar{\boldsymbol{D}}_k\boldsymbol{T}_k \tag{2}$$

式中:$\bar{\boldsymbol{D}}_k\in\boldsymbol{R}^{n_y\times r_k}$;$\boldsymbol{T}_k\in\boldsymbol{R}^{r_k\times n_u}$,并且$\operatorname{rank}(\bar{\boldsymbol{D}}_k)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{T}_k)=\boldsymbol{r}_k$,若$\boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{n}_u$时,可选$\bar{\boldsymbol{D}}_k=\boldsymbol{D}_k$,$\boldsymbol{T}_k=\boldsymbol{I}_{n_u}$。假设虚拟未知干扰$\bar{\boldsymbol{u}}_k=\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{u}_k$,则$\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{u}_k=\bar{\boldsymbol{D}}_k\bar{\boldsymbol{u}}_k$,原量测方程可以表示为

$$y_k=\delta_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k+\bar{\boldsymbol{D}}_k\bar{\boldsymbol{u}}_k+\boldsymbol{v}_k \tag{3}$$

假设已知虚拟未知干扰的估计$\hat{\bar{u}}_k$,则未知干扰的最小范数估计值:$\hat{u}_k=\boldsymbol{T}_k^+\hat{\bar{u}}_k$,其中$\boldsymbol{T}_k^+$为$\boldsymbol{T}_k$的Moore-Penrose逆[7]。

用随机变量δ_k来模拟量测缺失现象,并服从以下概率分布

$$\begin{cases}\operatorname{prob}\{\delta_k=1\}=\pi\\ \operatorname{prob}\{\delta_k=0\}=1-\pi\end{cases} \tag{4}$$

式中$\pi\in[0,1]$是给定的标量,代表量测缺失的概率是$1-\pi$,假设所有的随机变量$\delta_k(0\leqslant k\leqslant N)$在$k$中独立。

假设噪声信号$\boldsymbol{w}_k$和$\boldsymbol{v}_k$与初始向量$\boldsymbol{x}_0$是不相关的,并且噪声信号$\boldsymbol{w}_k$和$\boldsymbol{v}_k$具有以下统计特性:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{w}_k\}=0,\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_l^{\mathrm{T}}\}=R_w\delta(k,l)\\ &\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{v}_k\}=0,\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_l^{\mathrm{T}}\}=R_v\delta(k,l)\\ &\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{v}_l^{\mathrm{T}}\}=\boldsymbol{R}_{wv}\delta(k,l) \end{aligned} \tag{5}$$

式中:$R_w>0$、$R_v>0$,分别表示过程噪声协方差和量测噪声协方差;$\boldsymbol{R}_{wv}$表示过程和量测噪声的协方差矩阵。上述的协方差矩阵都是已知的,$\delta(\cdot,\cdot)$表示以下定义的克罗内克函数

$$\delta(k,l)=\begin{cases}1,k=l\\0,k\neq l\end{cases} \tag{6}$$

由式(5)-式(6)可以看出过程噪声$\boldsymbol{w}_k$和量测噪声$\boldsymbol{v}_k$是相关的。本文对具有相关噪声的系统,提出一种直接估计算法,简化估计值的分析过程。

2　递归滤波器的设计与研究

本文设计最小方差无偏递归滤波器,该滤波器适用于具有未知干扰、量测缺失、过程噪声和量测噪声相关的系统。与以往的设计方法不同,假设量测方程中未知干扰前系数矩阵不满秩。

为了同时估计未知干扰和状态,设计以下形式的滤波器:

$$\hat{\bar{\boldsymbol{u}}}_k=\bar{\boldsymbol{H}}_k(y_k-\pi\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k) \tag{7}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_k=\boldsymbol{T}_k^+\hat{\bar{\boldsymbol{u}}}_k \tag{8}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}=\boldsymbol{A}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{B}_k\hat{\boldsymbol{u}}_k+\bar{\boldsymbol{L}}_k(y_k-\pi\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k-\bar{\boldsymbol{D}}_k\hat{\bar{\boldsymbol{u}}}_k) \tag{9}$$

其中:$\hat{\bar{\boldsymbol{u}}}_k$表示$k$时刻虚拟未知干扰估计;$\hat{\boldsymbol{x}}_k$表示状态估计;$\bar{\boldsymbol{H}}_k$和$\bar{\boldsymbol{L}}_k$是待确定的滤波器增益矩阵。实际上,估计器(9)根据k时刻获得的信息,给出$k+1$时刻的状态估计值。由于本文反映的是带直通项的反馈系统,虚拟未知干扰估计器(7)可利用k时刻信息来估计k时刻的虚拟未知干扰$\hat{\bar{\boldsymbol{u}}}_k$,进而可以得到未知干扰估计$\hat{\boldsymbol{u}}_k$。

定义$\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k=\bar{\boldsymbol{u}}_k-\hat{\bar{\boldsymbol{u}}}_k$,$\tilde{\boldsymbol{x}}_k=\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k$,分别表示虚拟未知干扰估计误差和状态估计误差,并定义估计误差的协方差矩阵如下:

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_k^{\bar{u}}=\boldsymbol{E}\{\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k^{\mathrm{T}}\}\\ \boldsymbol{P}_{k+1}^{x}=\boldsymbol{E}\{\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{\mathrm{T}}\}\\ \boldsymbol{P}_k^{\bar{u}x}=\boldsymbol{E}\{\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^{\mathrm{T}}\}\end{cases} \tag{10}$$

定义虚拟未知干扰估计误差:$\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k=\bar{\boldsymbol{u}}_k-\hat{\bar{\boldsymbol{u}}}_k$,状态估计误差:$\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}=\boldsymbol{x}_{k+1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}$

$$\begin{aligned} &\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k=\bar{\boldsymbol{u}}_k-\hat{\bar{\boldsymbol{u}}}_k=\bar{\boldsymbol{u}}_k-\bar{\boldsymbol{H}}_k(\boldsymbol{y}_k-\pi\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k)=\\ &(\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{H}}_k\bar{\boldsymbol{D}}_k)\bar{\boldsymbol{u}}_k-\bar{\boldsymbol{H}}_k(\boldsymbol{\delta}_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k-\pi\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{v}_k) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}=\boldsymbol{x}_{k+1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}=\\ &\boldsymbol{A}_k\tilde{\boldsymbol{x}}_k+(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{T}_k^+-\bar{\boldsymbol{L}}_k\bar{\boldsymbol{D}}_k)\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k+\boldsymbol{w}_k-\bar{\boldsymbol{L}}_k(\delta_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k-\pi\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{v}_k) \end{aligned} \tag{12}$$

由于本文的目的是设计满足无偏最小方差的未知干扰和状态滤波器,首要任务是求解滤波器的增益矩阵$\bar{\boldsymbol{H}}_k$和$\bar{\boldsymbol{L}}_k$,保证估计误差均值为0,同时最小化估计误差协方差矩阵$\boldsymbol{P}_k^{\bar{u}}$和$\boldsymbol{P}_{k+1}^{x}$。

定理1.令状态估计的初始值$\hat{\boldsymbol{x}}_0=\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{x}_0\}$,当且仅当$\bar{\boldsymbol{H}}_k\bar{\boldsymbol{D}}_k=\boldsymbol{I}$时,式(7)-式(9)给出的滤波器满足无偏。

证明:由于随机变量δ_k与其他向量不相关,$\boldsymbol{w}_k$和$\boldsymbol{v}_k$统计特性已知,对方程(11)和方程(12)的两侧分别求期望

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\{\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k\}=\boldsymbol{E}\{(\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{H}}_k\bar{\boldsymbol{D}}_k)\bar{\boldsymbol{u}}_k-\bar{\boldsymbol{H}}_k\pi\boldsymbol{C}_k\tilde{\boldsymbol{x}}_k\}\\ \boldsymbol{E}\{\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}\}=\boldsymbol{E}\{(\boldsymbol{A}_k-\pi\bar{\boldsymbol{L}}_k\boldsymbol{C}_k)\tilde{\boldsymbol{x}}_k+(\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{T}_k^+-\bar{\boldsymbol{L}}_k\bar{\boldsymbol{D}}_k)\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}\}\end{cases} \tag{13}$$

假设初始值$\hat{\boldsymbol{x}}_0=\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{x}_0\}$,此时系统状态估计满足无偏,当且仅当$\bar{\boldsymbol{H}}_k\bar{\boldsymbol{D}}_k=\boldsymbol{I}$时通过递归计算方程(13),很容易得出$\boldsymbol{E}\{\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k\}=0$和$\boldsymbol{E}\{\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}\}=0$。

在$\bar{\boldsymbol{H}}_k\bar{\boldsymbol{D}}_k=\boldsymbol{I}$的无偏条件下,式(11)可以重写为

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k=-\bar{\boldsymbol{H}}_k(\delta_k\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}_k-\pi\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{v}_k) \tag{14}$$

虚拟未知干扰估计误差的协方差矩阵

$$\boldsymbol{P}_k^{\bar{u}}=\boldsymbol{E}\{\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k\tilde{\bar{\boldsymbol{u}}}_k^{\mathrm{T}}\}=\bar{\boldsymbol{H}}_k\boldsymbol{Q}_k\bar{\boldsymbol{H}}_k^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

式中 $Q_k=\pi C_k P_k^x C_k^{\mathrm T}+(\pi-\pi^2)C_k\hat{x}_k\hat{x}_k^{\mathrm T}C_k^{\mathrm T}+R_v$。由于量测缺失可能发生,此时包含了状态估计项 $\hat{x}_k$。注意当 $\pi=1$ 时,$Q_k=C_kP_k^xC_k^{\mathrm T}+R_v$,$Q_k$ 是对称正定矩阵。注:

$$\begin{cases}E\{\delta_k\}=E\{\delta_k^2\}=\pi\\ E\{x_kx_k^{\mathrm T}\}=P_k^x+\hat{x}_k\hat{x}_k^{\mathrm T}\end{cases}\tag{16}$$

状态估计误差协方差矩阵如下

$$\begin{aligned}&P_{k+1}^x=E\{\tilde{x}_{k+1}\tilde{x}_{k+1}^{\mathrm T}\}=\\&A_kP_k^xA_k^{\mathrm T}+(B_kT_k^+-\bar{L}_k\bar{D}_k)P_k^{\bar u}(B_kT_k^+-\bar{L}_k\bar{D}_k)^{\mathrm T}+\\&R_w+\bar{L}_kQ_k\bar{L}_k^{\mathrm T}+A_k(P_k^{\bar{u}x})^{\mathrm T}(B_kT_k^+-\bar{L}_k\bar{D}_k)^{\mathrm T}-\\&\pi A_kP_k^xC_k^{\mathrm T}\bar{L}_k^{\mathrm T}+(B_kT_k^+-\bar{L}_k\bar{D}_k)P_k^{\bar{u}x}A_k^{\mathrm T}-\\&(B_kT_k^+-\bar{L}_k\bar{D}_k)\bar{H}_kR_{wv}^{\mathrm T}-\pi(B_kT_k^+-\bar{L}_k\bar{D}_k)(P_k^{\bar{u}x})C_k^{\mathrm T}\bar{L}_k^{\mathrm T}+\\&(B_kT_k^+-\bar{L}_k\bar{D}_k)\bar{H}_kR_v\bar{L}_k^{\mathrm T}-R_{wv}\bar{H}_k^{\mathrm T}(B_kT_k^+-\bar{L}_k\bar{D}_k)^{\mathrm T}-\\&R_{wv}\bar{L}_k^{\mathrm T}-\pi\bar{L}_kC_kP_k^xA_k^{\mathrm T}-\pi\bar{L}_kC_k(P_k^{\bar{u}x})^{\mathrm T}(B_kT_k^+-\bar{L}_k\bar{D}_k)^{\mathrm T}+\\&\bar{L}_kR_v\bar{H}_k^{\mathrm T}(B_kT_k^+-\bar{L}_k\bar{D}_k)^{\mathrm T}-\bar{L}_kR_{wv}^{\mathrm T}\end{aligned}\tag{17}$$

其中虚拟未知干扰和状态的估计误差协方差矩阵

$$\begin{aligned}&P_k^{\bar{u}x}=E\{\tilde{\bar{u}}_k\tilde{x}_k^{\mathrm T}\}=E\{-\bar{H}_k(\delta_kC_kx_k-\pi C_k\hat{x}_k+v_k)\tilde{x}_k^{\mathrm T}\}=-\\&\pi\bar{H}_kC_kP_k^x\end{aligned}\tag{18}$$

为了简化描述,协方差矩阵 P_{k+1}^x 可以重写为

$$P_{k+1}^x=\bar{L}_kS_k\bar{L}_k^{\mathrm T}+\bar{L}_kT_k+T_k^{\mathrm T}\bar{L}_k^{\mathrm T}+E_k+R_k\tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned}&E_k=A_kP_k^xA_k^{\mathrm T}+B_kT_k^+P_k^{\bar u}(B_kT_k^+)^{\mathrm T}+\\&A_k(P_k^{\bar{u}x})^{\mathrm T}(B_kT_k^+)^{\mathrm T}+B_kT_k^+P_k^{\bar{u}x}A_k^{\mathrm T}\end{aligned}\tag{20}$$

$$R_k=R_w-B_kT_k^+\bar{H}_kR_{wv}^{\mathrm T}-R_{wv}\bar{H}_k^{\mathrm T}(B_kT_k^+)^{\mathrm T}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}&T_k=-\bar{D}_kP_k^{\bar u}(B_kT_k^+)^{\mathrm T}-\bar{D}P_k^{\bar{u}x}A_k^{\mathrm T}+\bar{D}_k\bar{H}_kR_{wv}^{\mathrm T}-\\&\pi C_kP_k^xA_k^{\mathrm T}-R_{wv}^{\mathrm T}+Q_k\bar{H}_k(B_kT_k^+)^{\mathrm T}-R_{wv}^{\mathrm T}\end{aligned}\tag{22}$$

$$S_k=\bar{D}_kP_k^{\bar u}\bar{D}_k^{\mathrm T}+Q_k-\bar{D}_k\bar{H}_kQ_k-Q_k\bar{H}_k^{\mathrm T}\bar{D}_k^{\mathrm T}\tag{23}$$

通过最小化式(15)和式(19)给出的协方差矩阵 $P_k^{\bar u}$ 和 P_{k+1}^x 来确定计算滤波器中待定增益矩阵 $\bar{H}_k$ 和 $\bar{L}_k$。

定理 2.经过满秩分解后的系数矩阵 $\bar{D}_k$ 满足 $\bar{H}_k\bar{D}_k=I$ 时,递归滤波器(7)-递归滤波器(9)可以实现无偏估计。在此前提下,设计增益矩阵 $\bar{H}_k$ 满足

$$\bar{H}_k=(\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k\bar{D}_k)^{-1}\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1}\tag{24}$$

可以得到最小虚拟未知干扰估计误差协方差矩阵 $P_k^{\bar u}$。

$$P_k^{\bar u}=(\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k\bar{D}_k)^{-1}\tag{25}$$

证明:将增益矩阵 $\bar{H}_k$ 的求取转换为带约束条件的优化问题,目的是满足估计误差协方差 $P_k^{\bar u}$ 最小。在这里考虑使用拉格朗日乘子法,其中 Λ 表示拉格朗日乘子,将无偏条件 $\bar{H}_k\bar{D}_k=I$ 作为约束,构造新的拉格朗日函数:

$$\begin{aligned}&P_k^{\bar u}(\Lambda)=P_k^{\bar u}+(I-\bar{H}_k\bar{D}_k)\Lambda_k+\Lambda_k^{\mathrm T}(I-\bar{D}_k^{\mathrm T}\bar{H}_k^{\mathrm T})=(\bar{H}_k-\Lambda_k^{\mathrm T}\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1})Q_k(\bar{H}_k-\Lambda_k^{\mathrm T}\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1})^{\mathrm T}-[\Lambda_k-\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1}\bar{D}_k]^{\mathrm T}\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1}\bar{D}_k[\Lambda_k-\\&\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1}\bar{D}_k]+(\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1}\bar{D}_k)^{-1}\end{aligned}\tag{26}$$

结合对称正定矩阵的相关定义,确定增益矩阵 $\bar{H}_k$ 的取值使协方差矩阵 $P_k^{\bar u}$ 最小。详细证明过程见参考文献[8]。

以最优增益矩阵 $\bar{H}_k$ 和协方差矩阵 $P_k^{\bar u}$ 为基础,通过求取状态滤波器中的增益矩阵 $\bar{L}_k$,最小化状态估计误差的协方差 P_{k+1}^x。将式(24)-式(25)代入式(23),得

$$\begin{aligned}&S_k=\bar{D}_kP_k^{\bar u}\bar{D}_k^{\mathrm T}+Q_k-\bar{D}_k\bar{H}_kQ_k-Q_k\bar{H}_k^{\mathrm T}\bar{D}_k^{\mathrm T}=\\&Q_k-\bar{D}_k(\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k\bar{D}_k)^{-1}\bar{D}_k^{\mathrm T}=[I-\bar{D}_k(\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k\bar{D}_k)^{-1}\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1}]Q_k\end{aligned}\tag{27}$$

由矩阵行列式性质得

$$\begin{aligned}&\det(S_k)=\det[I-\bar{D}_k(\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1}\bar{D}_k)^{-1}\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1}]\det(Q_k)=\\&\det[I-(\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1}\bar{D}_k)^{-1}\bar{D}_k^{\mathrm T}Q_k^{-1}\bar{D}_k]\det(Q_k)=0\end{aligned}\tag{28}$$

由式(28)可以看出 S_k 是奇异矩阵,此时假设 $R(S_k)=r_k$,令增益矩阵 $\bar{L}_k$ 满足以下形式

$$\bar{L}_k=L_kM_k\tag{29}$$

式中:$M_k\in R^{r_k\times n_y}$ 满足 $M_kS_kM_k^{\mathrm T}$ 是可逆的;$\bar{L}_k$ 是具有适当维数的矩阵。因为 $R(S_k)=r_k$,存在一定的正交矩阵 $U_k\in R^{n_y\times n_y}$,满足

$$U_kS_kU_k^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}\Lambda_{r_k}&0\\0&0\end{bmatrix}\tag{30}$$

Λ_{r_k} 是由 S_k 的 r_k 个非 0 特征值组成的对角矩阵,可以证明 $M_kS_kM_k^{\mathrm T}$ 是可逆的,利用矩阵对角化理论,给出了矩阵 M_k 的计算方法如下

$$M_k=[I_{r_k}\quad 0]U_k\tag{31}$$

通过 L_k 和 M_k 可以确定最优的增益矩阵 $\bar{L}_k$,状态估计误差协方差矩阵是

$$\begin{aligned}&P_{k+1}^x=\bar{L}_kS_k\bar{L}_k^{\mathrm T}+\bar{L}_kT_k+T_k^{\mathrm T}\bar{L}_k^{\mathrm T}+E_k+R_k=\\&L_kM_kS_kM_k^{\mathrm T}L_k^{\mathrm T}+L_kM_kT_k+T_k^{\mathrm T}M_k^{\mathrm T}L_k^{\mathrm T}+E_k+R_k\end{aligned}\tag{32}$$

由于 $M_kS_kM_k^{\mathrm T}$ 可逆,上式重写为

$$\begin{aligned}&P_{k+1}^x=(L_kM_kS_kM_k^{\mathrm T}+T_k^{\mathrm T}M_k^{\mathrm T})[L_k+T_k^{\mathrm T}M_k^{\mathrm T}(M_kS_kM_k^{\mathrm T})^{-1}]^{\mathrm T}+E_k+R_k-T_k^{\mathrm T}M_k^{\mathrm T}(M_kS_kM_k^{\mathrm T})^{-1}M_kT_k=[L_k+T_k^{\mathrm T}M_k^{\mathrm T}(M_kS_kM_k^{\mathrm T})^{-1}]\\&(M_kS_kM_k^{\mathrm T})[L_k+T_k^{\mathrm T}M_k^{\mathrm T}(M_kS_kM_k^{\mathrm T})^{-1}]+E_k+R_k-T_k^{\mathrm T}M_k^{\mathrm T}(M_kS_kM_k^{\mathrm T})^{-1}M_kT_k\end{aligned}\tag{33}$$

当 $L_k=-T_k^{\mathrm T}M_k^{\mathrm T}(M_kS_kM_k^{\mathrm T})^{-1}$ 时,P_{k+1}^x 最小。此时的增益矩阵表示为

$$\bar{L}_k=L_kM_k=-T_k^{\mathrm T}M_k^{\mathrm T}(M_kS_kM_k^{\mathrm T})^{-1}M_k\tag{34}$$

3 数值仿真分析

假设初始的状态值 $x_0=[0.3\quad -0.5\quad 0.2]^{\mathrm T}$,系统的过程噪声和量测噪声分别为

$$w_k=\begin{bmatrix}0.1\\0.2\\0.3\end{bmatrix}\varepsilon,v_k=\begin{bmatrix}0.4\\0.7\end{bmatrix}\varepsilon$$

式中实数 ε 表示高斯白噪声,其均值为 0,协方差为 0.5。针对可能发生量测信息缺失的情况,在仿真实验中用 $\pi=$

0.95 的随机序列且服从伯努利分布的$\{\delta_k\}$来模拟量测丢失的过程。设置$\hat{\boldsymbol{x}}_0=[0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{P}_0^x=\boldsymbol{I}$ 递归计算增益矩阵 $\bar{\boldsymbol{H}}_k$ 和 $\bar{\boldsymbol{L}}_k$ 以及方差矩阵 $\boldsymbol{P}_k^{\bar{u}}$ 和 $\boldsymbol{P}_{k+1}^x$,加入的未知干扰类型为余弦函数和随机信号。本文通过一个数值仿真实例来验证该滤波算法的有效性。参照文献[11]选取适当系统矩阵如下,其中系数矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 是时变的。

$$\boldsymbol{B}_k=\begin{bmatrix}0.8 & 2\\ -0.75 & -0.8\\ 0.35 & -0.85\end{bmatrix},\boldsymbol{C}_k=\begin{bmatrix}-0.4 & 1 & 0.5\\ -0.3 & 1.5 & -0.1\end{bmatrix},\boldsymbol{D}_k=\begin{bmatrix}0 & 0.9\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_k=\begin{bmatrix}0.6 & -0.5 & 0.2\cos k\\ 0.2 & 0.4+0.4\cos(k) & -0.2\\ 0.2+0.2\sin k & 0.5 & -0.5\end{bmatrix}。$$

图 1 和图 2 分别是应用递归滤波器得到的线性系统状态 $\boldsymbol{x}_k$ 和未知干扰 $\boldsymbol{u}_k$ 的估计结果图。图 1 反映了系统状态的估计值跟随着真实值的变化,表现出良好的滤波性能,实现对系统状态的无偏估计。从图 2 可以看出,本文提出的递归滤波算法对未知干扰 $\boldsymbol{u}_2$ 能够实现良好的估计,但是对未知输入 $\boldsymbol{u}_1$ 没有产生估计效果,原因是对系数矩阵 $\boldsymbol{D}_k$ 进行满秩分解后的矩阵 $\boldsymbol{T}_k$ 的第一列系数全为 0,导致量测值输出中没有 $\boldsymbol{u}_1$ 的信息。

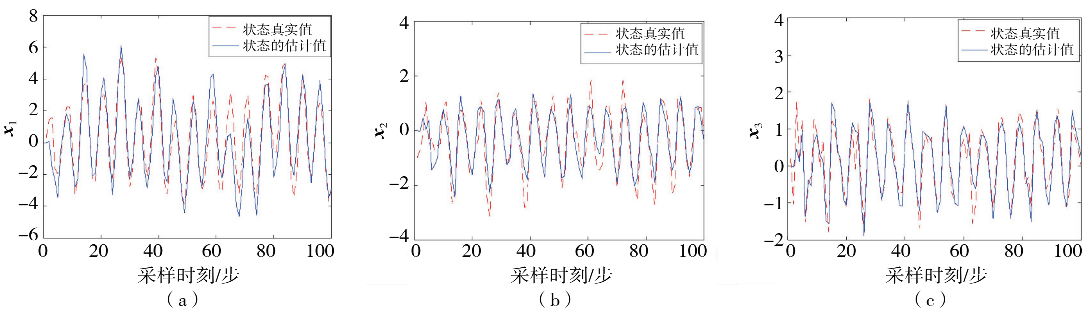

图 1　状态 $\boldsymbol{x}_k$ 真实值和估计值

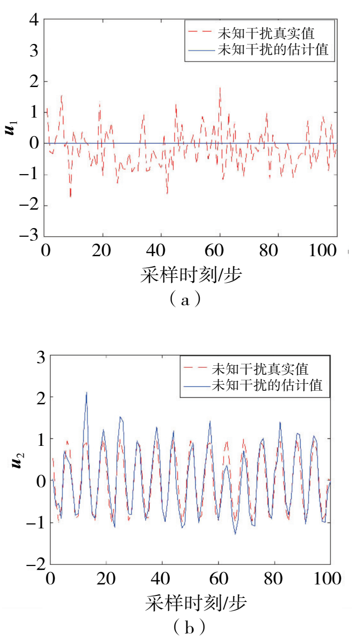

图 2　未知干扰 $\boldsymbol{u}_k$ 的真实值和估计值

4　结语

本文研究了一类含有量测缺失和相关噪声的线性离散系统状态和未知干扰同时估计问题,其中表示量测缺失的随机序列满足伯努利分布,系统内噪声相关和量测方程中未知干扰系数矩阵不满秩。提出了一种基于直接代数运算的滤波算法,该算法在满足未知干扰和线性系统状态估计无偏的条件基础上,以估计误差协方差矩阵最小化为目的,运用相关的数学理论知识获得滤波器中待定的增益矩阵,并通过数值仿真验证了该滤波算法有效性。

参考文献:

[1] ZAREI J,TABATABAEI M. Fractional order unknown input filter design for fault detection of discrete fractional order linear systems[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control,2018,40(16):4321-4329.

[2] LUO Z,FANG H J. Fault detection for non-linear system with unknown input and state constraints[J]. IET Signal Processing,2013,7(9):800-806.

[3] 卢洁莹. 移动机器人及编队的轨迹估计[D]. 广州:华南理工大学,2016.

[4] 崔鹰飞,陈则王. 基于单粒子模型的锂离子电池荷电状态估计[J].机械制造与自动化,2018,47(4):188-192.

[5] KITANIDIS P K. Unbiased minimum - variance linear state estimation[J]. Automatica,1987,23(6):775-778.

[6] KERWIN W S, PRINCE J L. On the optimality of recursive unbiased state estimation with unknown inputs[J]. Automatica,2000,36(9):1381-1383.

[7] 花玉,王娜,赵克友. 含未知输入的离散线性系统新型递归滤波方法[J]. 机械制造与自动化,2021,50(2):205-209.

[8] FANG H Z,SHI Y,YI J G. On stable simultaneous input and state estimation for discrete-time linear systems[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing,2011,25(8):671-686.

[9] NAHI N. Optimal recursive estimation with uncertain observation[J]. IEEE Transactions on Information Theory,1969,15(4):457-462.

[10] HU J,WANG Z D,GAO H J. Recursive filtering with random parameter matrices,multiple fading measurements and correlated noises[J]. Automatica,2013,49(11):3440-3448.

[11] SHU H S,ZHANG S J,SHEN B,et al. Unknown input and state estimation for linear discrete - time systems with missing measurements and correlated noises[J]. International Journal of General Systems,2016,45(5):648-661.

收稿日期:2021-07-08