

# 基于改进牛顿迭代法的混联机构正解分析

宋孝宗,王笑荣,付海涛,赵慧龙  
(兰州理工大学 机电工程学院,甘肃 兰州 730050)

**摘要:**为解决 XY-3-RPS 混联机构运动学正解求解困难、求解效率低等问题,提出一种利用 RBF 神经网络改进牛顿迭代的算法。运用闭环矢量法建立混联机构的正向运动学方程。在混联机构的运动学逆解中选取适量的训练样本,通过 RBF 神经网络进行训练,将训练后的样本估计值作为迭代初值,进行运动学正解的迭代。与牛顿迭代算法的结果相对比,该算法具有更高的精度和更快的迭代速度。

**关键词:**混联机构;正向运动学;RBF 神经网络;牛顿迭代法

**中图分类号:**TP183 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2023)04-0016-04

## Forward Kinematics Analysis of Hybrid Mechanism Based on Improved Newton Iteration Method

SONG Xiaozong, WANG Xiaorong, FU Haitao, ZHAO Huilong

(School of Mechanical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

**Abstract:** To overcome the difficulty and low efficiency in solving forward kinematics of XY-3-RPS hybrid mechanism, a Newton iteration method improved by radial basis function neural network was proposed. By closed-loop vector method, the forward kinematics equations of the hybrid mechanism were established. According to the inverse kinematics solution of the XY-3-RPS hybrid mechanism, appropriate training samples were selected and trained through RBF neural network. The estimated value of the sample after training was taken as the initial value of Newton iteration method to carry out the solution of the forward kinematics. Compared with the result of Newton iteration method, the improved algorithm has higher accuracy and faster iteration speed.

**Keywords:** hybrid mechanism; forward kinematics; RBF neural network; Newton iteration method

## 0 引言

混联机床在射流抛光的过程中要实时对喷嘴的位姿变化进行精确控制,否则将会破坏自由曲面,影响其表面粗糙度。因此,混联机构的位置正解分析变得尤为重要<sup>[1]</sup>。目前,国内外对并联机器人机构位置正解主要有解析法和数值法。解析法通过消元得到一个一元多项式,求解过程比较繁琐;数值法一般是通过牛顿迭代法<sup>[2-3]</sup>进行求解,通过给定特定的迭代初值,将非线性方程组逐步转化成线性方程进行求解,但是比较依赖于初值的选取,如果初值选取得不合适,会造成迭代结果的不收敛。

近年来,随着智能算法的发展,越来越多的智能算法<sup>[4-6]</sup>应用在求解机构的运动学上。宋伟刚等<sup>[7]</sup>利用 RBF 神经网络算法求解了 Stewart 机构的运动学正解。朱齐丹等<sup>[8]</sup>利用 BP 神经网络混合算法求解了 Stewart 机构的运动学正解。但是神经网络算法的精度往往受限于训练样本的个数,数量越多,精度越高,运算速度却会下降。为了弥补上述算法的不足,本文在结合 RBF 神经网络和

牛顿迭代两种算法的基础上,提出了一种利用神经网络改进的牛顿迭代算法。利用神经网络对混联机构的运动学逆解进行训练,将预测的估计值作为牛顿迭代初值进行迭代求解计算,与普通的牛顿迭代法相比,有更高的精度和更快的迭代速度。

## 1 混联抛光机构运动学分析

### 1.1 XY-3-RPS 混联抛光机构介绍

XY-3-RPS 纳米胶体射流抛光混联机器人的总体设计是根据纳米胶体射流抛光小型复杂曲面所需技术指标来确定的。其整体结构呈上下分布,串联平台在上,并联平台在下,并联部分的静平台与串联平台的下底板相连,三维模型如图 1 所示。串联平台为十字滑台,可实现沿  $x$ 、 $y$  轴两个方向的平移;并联平台采用 3-RPS 结构,由伺服电机带动 3 个电动缸进行伸缩运动,最终复合成绕  $x$ 、 $y$  轴的转动和  $z$  轴的升降运动。在动平台上安装多种射流抛光喷头即可对自由曲面进行抛光。

**基金项目:**国家自然科学基金资助项目(51565031)

**第一作者简介:**宋孝宗(1981—),男,甘肃会宁人,副教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为超精密加工工艺及装备、混联机床研究等, songxiaozong@126.com。



图1 混联抛光机器人三维模型图

## 1.2 混联抛光机构运动学正解数学模型

图2为XY-3-RPS混联抛光机构的结构简图。

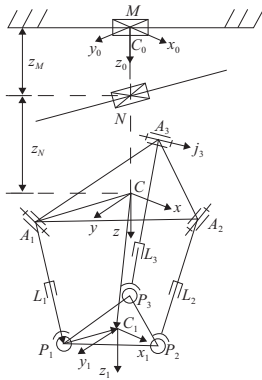


图2 混联机构结构简图

如图2所示,在 $x$ 平台质心处建立绝对坐标系 $C_0-x_0y_0z_0$ ,坐标原点 $C_0$ 与 $x$ 平台质心 $M$ 点重合, $y$ 平台质心点 $N$ 与点 $M$ 的垂直距离为 $z_M$ 。定平台 $A_1A_2A_3$ 和动平台 $P_1P_2P_3$ 是两个相似的等边三角形,其各自的几何中心分别为点 $C$ 和点 $C_1$ ,且都在同一条轴线上,其中点 $C$ 与点 $M$ 的垂直距离为 $z_M+z_N$ 。根据右手定则,分别在定、动平台的几何中心处建坐标系 $C-xyz, C_1-x_1y_1z_1$ 。3条支链简化

$${}^0T_{C_1} = {}^0T_C \cdot {}^CT_{C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z_M+z_N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^CR_{C_1} & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma + c\alpha s\beta & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\beta & x+x_c \\ c\beta s\gamma & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & c\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & y+y_c \\ s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta & z_c+z_M+z_N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中 ${}^0T_C$ 为定平台坐标系相对于绝对坐标系的平移变换矩阵。因此,在绝对坐标系下,混联机构驱动杆长为:

$$l_i = |L_i| = \sqrt{({}^0T_{C_1}p_i - {}^0a_i)^T ({}^0T_{C_1}p_i - {}^0a_i)} \quad (8)$$

$$L_i = {}^0p_i - {}^0a_i = {}^0T_{C_1}p_i - {}^0T_C a_i \quad (9)$$

式中 ${}^0p_i, {}^0a_i$ 分别为点 $P_i, A_i$ 在绝对坐标系下的坐标向量。混联机器人的正解问题即为已知串联平台的驱动位移 $x, y$ 和并联驱动杆位移 $l_i$ ,求解混联机构末端平台中心的位置 $z_c, \alpha, \beta$ 。由式(8)可得,XY-3-RPS混联机构的正运动学方程为

$$F_i(\alpha, \beta, z_c) = l_i - \sqrt{({}^0T_{C_1}p_i - {}^0a_i)^T ({}^0T_{C_1}p_i - {}^0a_i)} = 0 \quad (10)$$

为伸缩杆分别用 $L_1, L_2, L_3$ 表示,定、动平台的外接圆半径分别为 $R$ 和 $r$ 。因此,每条支链都可以写成图2中红线所表示的封闭矢量环(本刊黑白印刷,相关疑问请咨询作者)。

$$CC_1 = CA_i + A_iP_i - C_1P_i \quad (1)$$

式中动坐标系原点 $C_1$ 在绝对坐标系下的位置矢量为 $C_1 = [x_c \ y_c \ z_c]^T$ 。用 $a_i, L_i$ 分别表示在定平台坐标系下的向量 $CA_i$ 和 $A_iP_i, p_i$ 表示在动坐标系下的向量 $C_1P_i, j_i$ 表示各旋转副轴线在定平台坐标系下的单位向量。上式可改写为

$$L_i = {}^CR_{C_1}p_i + C_1 - a_i \quad (2)$$

式中的 $a_i, p_i$ 还有轴线向量 $j_i$ 可由几何关系得出,而 ${}^CR_{C_1}$ 为动坐标系在定平台坐标系下的旋转矩阵,可由欧拉角表示,即

$${}^CR_{C_1} = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ c\beta s\gamma & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ -s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中: $s\alpha = \sin\alpha; c\alpha = \cos\alpha$ ,以此类推。

由于每条支链都会受到转动副的约束,且转动副轴线单位向量 $j_i$ 始终与支链垂直,所以可得支链的约束方程

$$j_i \cdot L_i = j_i \cdot ({}^CR_{C_1}p_i + C_1 - a_i) = 0 \quad (4)$$

由上式可得到 $x_c, y_c, \gamma$ 关于 $z_c, \alpha, \beta$ 的表达式为

$$\begin{cases} x_c = \frac{r}{2}(\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma) \\ y_c = -r\cos\beta\sin\gamma \\ \gamma = \arctan\left(\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right) \end{cases} \quad (5)$$

由于3阶矩阵只能表示纯旋转运动,为了表示混联机构的平移运动,所以需要将其广义化为4阶的齐次坐标,即

$${}^CT_{C_1} = \begin{bmatrix} {}^CR_{C_1} & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

分析图2可知,定平台坐标系相对于绝对坐标系只有 $x, y$ 的平移,而3-RPS并联平台是整体随 $y$ 平台移动,所以动平台相对于定平台没有相对运动,因此动平台坐标系相对于绝对坐标系的变换矩阵为

## 2 RBF神经网络改进牛顿迭代算法

### 2.1 RBF神经网络算法

如图3所示,RBF神经网络由输入层、输出层和隐含层构成,其中隐含层的径向基函数为高斯函数,输入层于隐含层的连接权值为1。输入参数为通过逆解求出的驱动杆的杆长值,输出参数为动平台的位置参数。

由于径向基函数为高斯函数,输入值与输出值必须在 $[0 \ 1]$ 的区间内,因此必须要对输入输出的样本参数 $[x_0 \ y_0]$ 进行归一化处理。

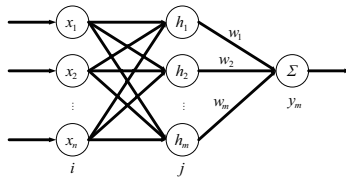


图3 RBF神经网络结构图

$$\begin{cases} x_i = \frac{x_{0i} - x_{0i,\min}}{x_{0i,\max} - x_{0i,\min}} \\ y_i = \frac{y_{0i} - y_{0i,\min}}{y_{0i,\max} - y_{0i,\min}} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

式中  $x_{0i,\min}$ 、 $y_{0i,\min}$ 、 $x_{0i,\max}$ 、 $y_{0i,\max}$  分别为输入与输出样本参数的最小值和最大值。样本训练完后,对于输出的结果需要进行反归一化处理:

$$y_{i,\text{out}} = y_{0i,\min} + y_i(y_{0i,\max} - y_{0i,\min}) \quad (12)$$

通过最近邻聚类学习算法选取适当的高斯函数的中心  $C_j$  和宽度  $r_j$  以及隐含层到输出层的权值  $w = [w_j]^T$ 。 $x = [x_i]^T$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 为 RBF 网络的输入信号,可得径向基函数:

$$h_j = \exp\left(-\frac{\|x - C_j\|^2}{2r_j^2}\right), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

因此 RBF 神经网络的输出为

$$y_m = \sum_{j=1}^m w_j h_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

### 2.2 RBF 神经网络改进牛顿迭代算法

运用 RBF 神经网络改进的牛顿迭代算法求 XY-3-RPS 混联机构的运动学正解时,首先采用 RBF 神经网络算法,根据运动学的逆解结果,在规定的运动范围内,随机选取 5 000 个采样点,作为神经网络的训练数据,其中 4 800 个采样点作为训练样本,其余的 200 个采样点作为测试样本。通过对运动学逆解的训练,可以实现混联机构的驱动关节和动平台位姿的非线性映射。然后根据式(10)结合牛顿迭代法,可以得出混联机构运动学正解的牛顿迭代公式:

$$h_i = h_0 - J^{-1} F(\alpha \ \beta \ z_c) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

式中:  $h_i = [\alpha \ \beta \ z_c]^T$ ;  $h_0$  为迭代初值;  $J$  为混联机构的雅克比矩阵。

根据运动学正解的牛顿迭代公式,首先将神经网络训

练得到的测试样本的结果作为迭代初值  $h_0$  进行迭代计算,其次将杆长值代入到正运动学方程中;然后计算混联机构的雅克比矩阵并按照牛顿迭代公式进行计算;记录每一个迭代点和迭代的误差值;最后判断误差值是否满足精度要求,如果满足精度要求,输出迭代值,如果不满足,则继续迭代,直到精度满足输出结果。RBF 神经网络改进的牛顿迭代算法的流程图如图 4 所示。

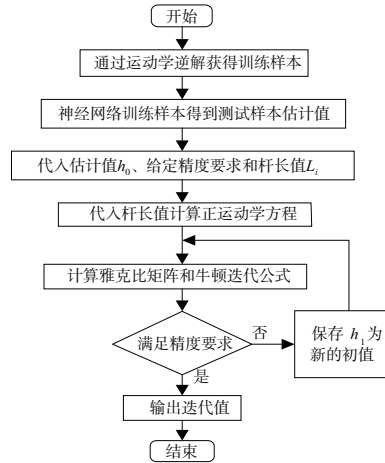


图4 RBF神经网络改进的牛顿迭代算法流程框图

### 3 算法实例

设 XY-3-RPS 混联机构的参数如下:定平台半径  $R = 100 \text{ mm}$ , 动平台半径  $r = 50 \text{ mm}$ , 运动范围  $\alpha, \beta \in [0^\circ \ 30^\circ]$ ,  $z_c \in [170 \ 210] \text{ mm}$ 。根据混联机构运动控制的需要在实际射流抛光加工的过程中,动平台位姿的绝对误差不超过  $10^{-4}$  即可视为满足要求,所以求解的误差阈值为  $10^{-5}$ 。在运动范围内,取动平台的位姿运动函数为

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{30}t \\ \beta = \frac{\pi}{30}t \\ z_c = 190 + 20\sin(\pi t) \end{cases} \quad t \in [0, 5] \quad (16)$$

根据 RBF 神经网络改进的牛顿迭代法的流程图可对混联机构进行正向运动学仿真运算,图 5 分别表示使用 RBF 神经网络改进前后的牛顿迭代算法求得的混联机构 200 个采样点的运动学正解位姿  $\alpha, \beta, z_c$  与采样点对应的位姿初始函数的误差图。

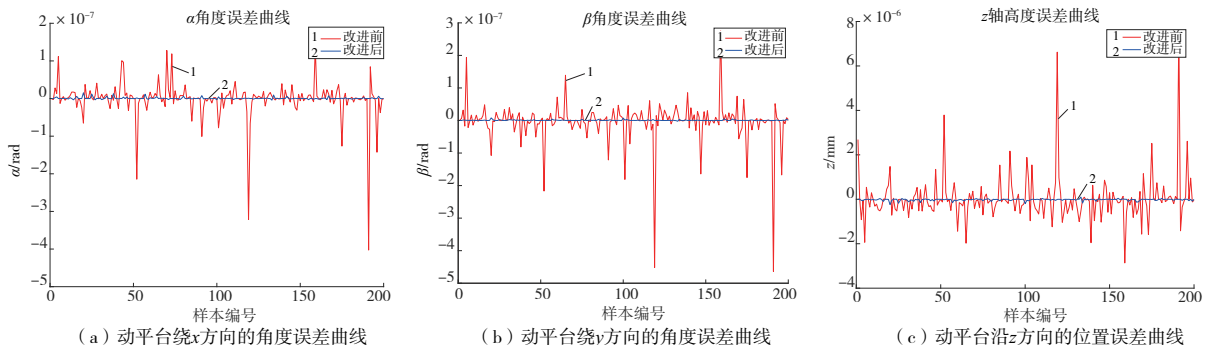


图5 改进前后牛顿迭代算法的误差曲线

从图5中可以看出利用神经网络改进后的算法求得的绕 $x$ 、 $y$ 轴转动的角度最大绝对误差分别为 $1.529\ 27\times 10^{-8}$  rad、 $7.984\ 74\times 10^{-9}$  rad,沿 $z$ 轴移动的最大绝对误差为 $2.393\ 06\times 10^{-7}$  mm。使用牛顿迭代算法求得混联机构绕 $x$ 、 $y$ 轴转动的角度最大绝对误差为 $4.026\ 22\times 10^{-7}$  rad、 $4.639\ 25\times 10^{-7}$  rad,沿 $z$ 轴移动的最大绝对误差为 $7.597\ 19\times 10^{-6}$  mm。

表1为利用RBF神经网络改进前后的牛顿迭代算法的均方误差。由表1可以得到改进后的算法与牛顿迭代法相比,在相同的误差精度要求的情况下,均方误差的精度降低了 $10^{-1}$ 量级。

表1 两种算法运动学正解的均方误差

参数	牛顿迭代法	改进牛顿迭代算法
$\alpha/\text{rad}$	$5.050\ 19\times 10^{-8}$	$2.543\ 96\times 10^{-9}$
$\beta/\text{rad}$	$6.516\ 55\times 10^{-8}$	$1.256\ 06\times 10^{-9}$
$z_c/\text{mm}$	$1.038\ 09\times 10^{-6}$	$4.143\ 81\times 10^{-8}$

图6为改进前后牛顿迭代算法的每个采样点的迭代次数曲线,图7为改进前后牛顿迭代算法的每个采样点的迭代时间曲线,表2为改进前后牛顿迭代算法求得200个采样点所需的总迭代次数和总时间。由图6、图7和表2可得,改进后的牛顿迭代算法要比改进前的迭代次数少,减少了54.76%;耗时更短,缩短了6.913 s,平均迭代时间缩短了9.2%。由此可以验证,利用RBF神经网络改进的牛顿迭代算法要比改进前的牛顿迭代算法精度更高,运算速度更快,效率更高。

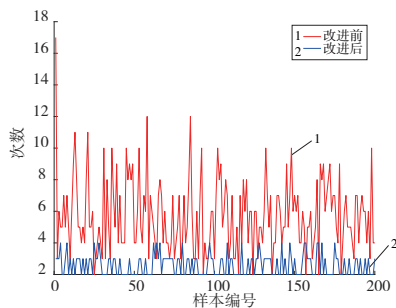


图6 改进前后牛顿迭代法的迭代次数曲线

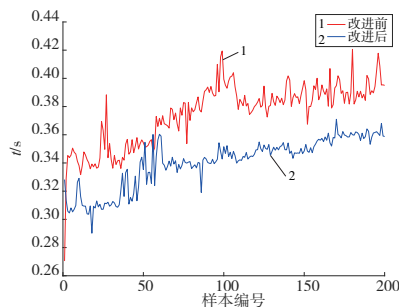


图7 改进前后牛顿迭代法的迭代时间曲线

表2 改进前后牛顿迭代法的迭代次数和迭代时间

参数	改进前	改进后
迭代次数/次	1 145	518
迭代时间/s	74.989 7	68.076 7
平均迭代时间/s	0.374 9	0.340 4

## 4 结语

本文建立了XY-3-RPS混联抛光机构的正向运动学数学模型,提出了一种利用RBF神经网络改进的牛顿迭代算法用来计算混联机构的运动学正解。该算法利用RBF神经网络训练的预测值作为牛顿迭代的迭代初值进行迭代求解,既可以避免RBF神经网络因训练样本数量不够而导致的精度不足,又可以避免牛顿迭代法对迭代初值的依赖性。通过对改进前后的牛顿迭代算法计算分析可知,改进后算法的均方误差比改进前的均方误差低 $10^{-1}$ 量级。改进后算法的迭代次数比改进前的迭代次数减少54.76%,迭代时间缩短了6.913 s,平均迭代时间缩短了9.2%。证实了利用RBF神经网络改进的牛顿迭代算法求解XY-3-RPS混联抛光机构的正向运动学具有更高的误差精度和更高的迭代效率,为后续开展混联机构射流抛光时的位置标定和运动控制等工作提供了理论基础。

### 参考文献:

- [1] 张强,秦东晨,朱强,等. 基于神经网络-牛顿混合算法的盾构掘进位姿求解研究[J]. 机械传动,2021,45(7):24-29.
- [2] LUO Y X, LIU Q Y. Chaotic finding method of position forward kinematics of 3 - DOF parallel robot [ C ]//2009 Third International Symposium on Intelligent Information Technology Application. Nanchang, China: IEEE, :44-47.
- [3] 韩方元,赵丁选,李天宇. 3-RPS 并联机构正解快速数值算法[J]. 农业机械学报,2011,42(4):229-233.
- [4] 毛冰滢,谢志江,吴小勇,等. 基于引导人工蜂群算法的3-RPS 并联机构正解优化[J]. 农业机械学报,2017,48(1):339-345.
- [5] 谢志江,梁欢,宋代平. 基于连续蚁群算法的3-RPS 并联机构正解[J]. 中国机械工程,2015,26(6):799-803.
- [6] 郭峰,谢立中,周成,等. 基于BP神经网络的自行高炮车姿态预测方法研究[J]. 机械制造与自动化,2021,50(5):125-128.
- [7] 宋伟刚,张国伟. 基于径向基函数神经网络的并联机器人运动学正问题[J]. 东北大学学报,2004,25(4):386-389.
- [8] 朱齐丹,张铮,纪勋. Stewart 平台实时位置正解通用方法[J]. 哈尔滨工程大学学报,2021,42(3):394-399.

收稿日期:2022-02-21