

# 齿轮啮合刚度建模中齿面摩擦因素影响分析研究

张建润,林成,卢熹

(东南大学 机械工程学院,江苏 南京 211189)

**摘要:** 齿轮系统在航空航天、汽车制造、农业机械等领域中应用广泛,能够实现复杂的动力传递与运动控制。齿轮啮合刚度及变化规律对齿轮系统动力学特性有直接影响。齿轮啮合过程中表面摩擦特性是影响齿面啮合刚度的主要因素之一,如何考虑摩擦因素,合理建立啮合面刚度模型长期以来一直是学术界研究的热点。分析目前主要的统计学模型、数值分析模型、分形接触理论模型的建模方式,为研究齿轮传动动力学建模提供参考。

**关键词:** 齿轮啮合;啮合刚度;摩擦因素;建模

**中图分类号:** TH117 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5276(2023)04-0001-08

## Analysis on Influence of Tooth Surface Friction Factors in Gear Mesh Stiffness Modeling

ZHANG Jianrun, LIN Cheng, LU Xi

(School of Mechanical Engineering, Southeast University, Nanjing 211189, China)

**Abstract:** Gear systems, widely used in aerospace, automotive manufacturing, agricultural machinery and other fields, can fulfill complex power transmission and motion control, and the gear meshing stiffness and variation law have a direct impact on the dynamic characteristics of gear systems. As the surface friction characteristics in the gear meshing process is one of the main factors affecting the tooth surface meshing stiffness, how to reasonably establish the meshing surface stiffness model considering the friction factor has long been a hot spot for academic research. This paper analyzes present main modeling approaches, such as statistical model, numerical analysis model and fractal contact theory model, which can be of reference for the study of gear transmission dynamics modeling.

**Keywords:** gear meshing; meshing stiffness; friction factor; modeling

## 0 引言

齿轮传动系统具有结构紧凑、传动速比宽、传动效率高等优势,被广泛应用于工业制造、航空航天等领域,用以传输动力、提供转速变化、改变运动方向等<sup>[1-2]</sup>。齿轮传动系统的稳定性主要依靠齿轮副的稳定性,而齿轮啮合刚度等内部循环激励的改变会造成齿轮副稳定性的波动<sup>[3-4]</sup>,增大齿轮传动系统的振动与噪声,增加动态载荷,最终造成齿轮和轴承损坏<sup>[5]</sup>。即使齿轮被完美加工和装配,这种影响依旧存在<sup>[6]</sup>。CHEN等<sup>[7]</sup>采用解析法分析直齿锥齿轮啮合刚度变化的动态响应,LIU等<sup>[8]</sup>采用改进势能法研究含裂纹齿轮啮合刚度的动态变化。研究结果表明,啮合刚度的变化对轮系动态响应、齿形载荷均有重大影响。因此,准确建立啮合刚度模型是齿轮系统设计、研究、应用的首要问题。

在实际生产中,由于制造加工误差、磨损、润滑等原因,齿轮传动系统无法完全规避啮合面摩擦的影响。啮合面摩擦具有非线性振动特征,使得传动系统的动力学行为

变得复杂,导致传动系统精度降低<sup>[9]</sup>。如图1所示<sup>[10]</sup>( $F$ 为沿啮合线作用于齿面的压力; $F_v$ 与 $F_h$ 分别为作用力 $F$ 的垂直、水平分量; $f$ 为垂直于力 $F$ 作用的摩擦力; $f_v$ 与 $f_h$ 分别为摩擦力 $f$ 的垂直、水平分量),摩擦力对切向力与径向力造成了影响,导致临界啮合面积与实际啮合面积发生改变,最终导致在实际的啮合过程中,动态弹性变形要比未考虑摩擦的啮合刚度模型计算所得弹性变形更为复杂,最终导致啮合刚度计算不准确。因此,在啮合刚度建模过程中考虑摩擦因素的影响至关重要。

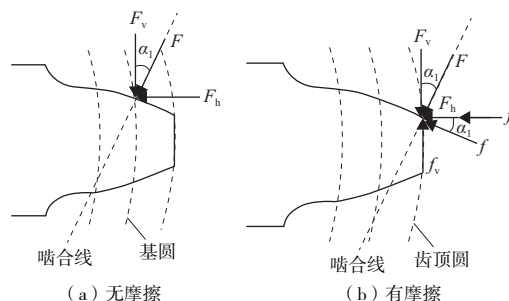


图1 轮齿啮合受力示意图

**基金项目:** 国家重点研发计划项目(52275092)

**第一作者简介:** 张建润(1962—),男,江苏镇江人,教授,博导,博士,江苏省数控机床中心副主任,江苏省振动工程学会常务理事,中国机械动力学专业委员会常务委员。长期从事机械动力学、振动与噪声控制及产品创新设计研究。先后承担多项国家、省部级科学基金项目、重点研发项目、国家专项项目,发表SCI及EI论文70余篇,zhangjr@seu.edu.cn。

## 1 齿轮啮合刚度建模方法研究现状

目前,针对齿轮啮合刚度模型的建模方法,主要分为实验法、有限元法、解析法和势能法。

### 1.1 基于实验法的啮合刚度建模方法

实验法是研究齿轮啮合刚度的最直接方法,其中,以光弹性技术与应变片技术为代表的应力应变技术可精确确定形状复杂零件测量区域内应力分布,故被广泛应用于齿轮啮合刚度模型分析<sup>[11]</sup>。

光弹性技术基于应力-光学定律,通过分析光波干涉形成的应力光图得到模型应力变化规律。如图2和式(1)所示,RAGHUWANSHI等<sup>[12]</sup>基于光弹性技术设计一种测量齿轮啮合刚度的新实验技术,通过使用激光位移传感器沿啮合线测量轮齿应力从而获得轮齿挠度用于计算齿轮啮合刚度。

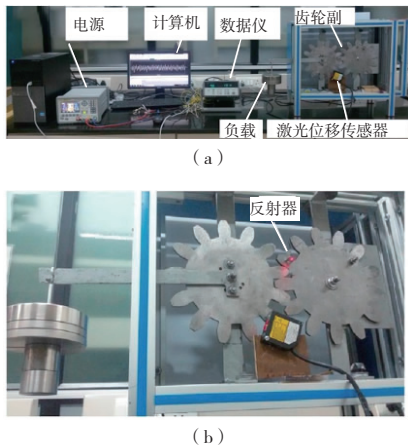


图2 齿轮副及激光装置的实验布置

$$k = \frac{F}{\delta_i} = \frac{F}{\delta_{ix} \cos \alpha + \delta_{iy} \sin \alpha} \quad (1)$$

式中: $F$ 为啮合齿法向力; $\delta_i$ 为根据应力分布得到的轮齿挠度; $\alpha$ 为压力角。

PANDYA等<sup>[13]</sup>基于常规光弹性技术提出一种计算裂纹齿轮齿应力强度因子的实验方法,定量分析了啮合位置、裂纹长度、裂纹形态与啮合刚度间的关系。但该技术对玻璃内折射率要求较高。此外,该技术易受玻璃外表面状况影响,实验结果精度存在波动。

应变片技术通过测量物体表面微小变形确定结构承受应变,从而求得结构所受应力。与光弹性技术类似,研究者对应变片技术在齿轮啮合刚度领域的应用进行了广泛研究。如式(2)和图3所示,RAGHUWANSHI等<sup>[14]</sup>提出一种基于应变片技术的实验方法,分别基于应变能和应变能释放率计算健康齿轮与裂纹齿轮的啮合刚度及应力强度因子,分析裂纹长度对啮合刚度的影响。

$$k = \frac{dU}{dV} \cdot \frac{4}{\varepsilon_{\max}^2 E} \quad (2)$$

式中: $U$ 为应变能; $V$ 为应变片覆盖体积; $\varepsilon_{\max}$ 为最大应变; $E$ 为弹性模量。

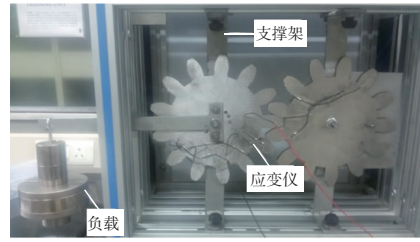


图3 齿轮副及应变片的实验布置

DAI等<sup>[15]</sup>基于应变片技术提出一种改进齿轮啮合刚度解析模型,对不同加载力矩下的直齿轮啮合刚度进行实验研究并与传统模型对比分析。结果表明,该模型能准确计算非平稳条件下啮合刚度。但该技术未考虑轮齿变形且对设备硬件要求较高。

综上,实验法依赖专用测量设备与复杂测量方法,对于齿轮啮合中不确定因素的影响是很好的解决方法,但对实验过程要求较高,数据处理较复杂,缺乏普遍性。

### 1.2 基于有限元法的啮合刚度建模方法

随着计算机技术的发展,可操作性强的有限元法逐渐成熟。有限元法基于弱导数理论将连续、无限自由度的求解区域离散为一组有限自由度、按一定方式相互联结的单元组合物体,该方法特别适合于几何与物理上十分复杂的问题。

考虑到实验法需要计算庞大、复杂的刚度矩阵,研究人员开始采用有限元法计算啮合刚度。如图4所示,绘制啮合齿轮有限元网格模型,利用有限元软件在完整啮合循环下求解啮合刚度。

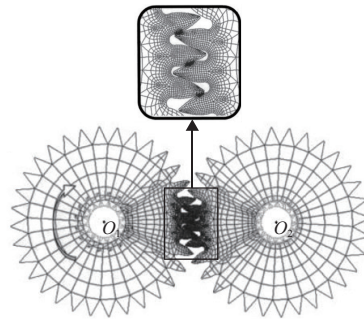


图4 齿轮啮合有限元模型

WANG等<sup>[16]</sup>综合有限元法与解析法分析考虑初始接触齿间间隙与外载荷的小齿差内齿轮副啮合刚度。FENG等<sup>[17]</sup>建立一种计算内齿轮副啮合刚度的有限元模型,将齿的整体变形分离为整体有限元模型和局部模型。PEHLIVANOGLU等<sup>[18]</sup>将微型结构有限元公式应用于微正齿轮副啮合刚度,揭示了尺寸对微齿轮啮合刚度的影响。

有限元法具有理论完整、函数形式简单、精度和收敛性高等优点,但有限元法需要细化网格,效率较低。此外,在计算啮合刚度时涉及质量矩阵求逆,导致计算速度较慢。其次,同时模拟弯曲、剪切及角偏转时,有限元分析难以获得高质量啮合刚度。因此,需要进一步研究高效、高精度的有限元求解方法。

### 1.3 基于解析法的啮合刚度建模方法

为减少细化有限元网格过程的不便,研究人员将计算时间短、计算精度高的解析模型引入有限元法<sup>[19]</sup>,提出解析法。CHAARI 等<sup>[20]</sup>提出了一种估计啮合刚度的解析方法,通过计算圆角基础挠度从而得到啮合刚度,如式(3)所示。

$$k = \frac{F_z}{\delta_f} = \frac{\cos^2 \alpha_m}{WE} \left[ L^* \left( \frac{u_f}{s_f} \right)^2 + M^* \left( \frac{u_f}{s_f} \right) + P^* (1 + Q^* \operatorname{tg}^2 \alpha) \right] \quad (3)$$

式中: $F_z$ 为载荷; $\delta_f$ 为圆角基础挠度; $W$ 为齿宽; $\alpha$ 为压力角; $E$ 为弹性模量; $L^*$ 、 $M^*$ 、 $P^*$ 、 $Q^*$ 可采用多项式解析函数逼近得到; $\mu_f$ 为载荷作用点距齿根距离; $s_f$ 为轮齿宽度。

CHANG 等<sup>[21]</sup>将有限元法与弹性体局部啮合解析模型相结合,提出计算直齿圆柱齿轮啮合刚度的解析方法,该方法将啮合点变形分离成线性全局项与非线性局部项,如图5、图6所示,从而实现了对齿轮啮合刚度和载荷分布的预测。

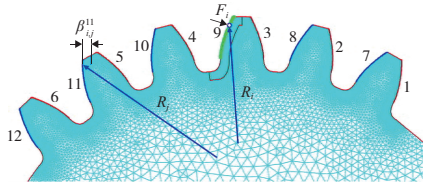


图5 线性全局有限元模型

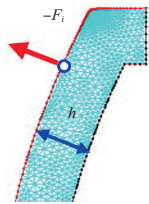


图6 非线性局部有限元模型

CHEN 等<sup>[7]</sup>推导直齿锥齿轮瞬时单啮合刚度解析模型,该方法利用附加变形协调条件和力平衡原理,实现啮合刚度快速求解。虽然减少了细化网格的计算量,但解析法缺乏通用性,该方法中部分参数仍然是由有限元法计算,对有限元软件依赖较大。后续应着重研究如何减少对有限元技术的依赖。

### 1.4 基于势能法的啮合刚度建模方法

1987年,YANG 等<sup>[22]</sup>从势能角度将齿轮单齿啮合刚度分为赫兹(Hertz)接触刚度 $k_h$ 、弯曲刚度 $k_b$ 、径向压缩刚度 $k_a$ ,该方法被视为势能法的先驱。在YANG的基础上,TIAN<sup>[23]</sup>考虑剪切作用的影响,增加剪切刚度 $k_s$ 。后续学者SAINSOT<sup>[24]</sup>在此基础上增加轮齿基体刚度 $k_f$ ,构成势能法雏形,如式(4)所示,下标1、2分别代表主动轮

与被动轮。

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_{h1}} + \frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{h2}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{f2}} \quad (4)$$

基于势能法,国内外研究人员研究了各种因素对齿轮啮合刚度的影响。SAINSOT 等<sup>[24]</sup>基于势能法提出一个用于计算齿轮引发的齿形偏移的经验公式,该公式被广泛应用于计算轮齿基体刚度。LIANG 等<sup>[25]</sup>利用势能法分析评估裂纹行星齿轮组的啮合刚度,并推导出弯曲、剪切和径向压缩刚度的分析方程。ZHOU 等<sup>[26]</sup>开发了一个改进数学模型,用于模拟从小齿轮根部开始线性增长的齿轮裂纹,并考虑到齿轮体的变形,改进了计算啮合刚度的势能方法。

势能法虽然比实验法、有限元法、解析法具有更多优势,但轮齿基体刚度计算公式只适用于单齿啮合区域。对于双齿啮合区域,则会出现相互干涉现象,然而这种结构耦合现象在势能法中未被充分考虑。因此,在运用势能法构建啮合刚度模型时需要充分考虑结构耦合现象的影响。

## 2 摩擦因素对啮合刚度模型的影响

上述研究大多仅考虑粗糙表面对啮合刚度模型的影响,属于静力学范畴,忽略了系统的动态参数问题。如,势能法通过计算齿轮在法向载荷下的弹性形变,进而计算出各啮合点处的刚度,而摩擦力引起的弹性形变则被忽略。在实际工程中,由于制造加工误差、磨损、润滑等原因,啮合面摩擦广泛存在于齿轮传动系统中,是啮合副运动的主要阻力源<sup>[27]</sup>。在齿轮啮合过程中,摩擦因数是齿形参数、表面质量、润滑状态、载荷、油温、曲率半径、啮合速度等因素的综合结果,使得啮合面间摩擦力不断变化<sup>[28]</sup>。TABOR<sup>[29]</sup>总结了摩擦对啮合面的影响,即实际啮合面积、啮合面的性质和强度、啮合微凸体剪切和破裂的方式。图7为摩擦啮合过程示意图,啮合面间存在摩擦力会使得轮齿啮合面发生变形,导致粗糙表面微凸体临界啮合面积与实际啮合面积发生改变<sup>[10]</sup>,如图8所示<sup>[30]</sup>,随着摩擦因数的增大,临界接触面积随之逐渐增大,导致在实际的啮合过程中,动态弹性形变要比现有计算方法所得的弹性形变更为复杂<sup>[31]</sup>,最终导致啮合刚度计算不准确。如图9所示,相同载荷下,随着摩擦因数的改变,齿轮啮合刚度也随之改变<sup>[30]</sup>。此外,摩擦力会对啮合面的载荷分布和应力状态产生影响,进而影响啮合面的表面质量,影响啮合刚度准确性。当摩擦较大时,啮合表面将会出现滑动、磨损等现象,增大啮合副的变形,使得啮合刚度出现波动。

在动态运行时,啮合副的振动特性与稳定性主要取决于啮合刚度<sup>[32]</sup>。因此,对摩擦因素进行忽略,或简单确定摩擦因素对啮合刚度的影响,将会直接影响齿轮系统传动功率和效率,还会影响啮合副的寿命,从而引起设备的可靠性问题<sup>[33]</sup>。故在啮合副的设计与优化过程中,必须综合研究啮合刚度与摩擦之间的关系,以实现最佳的工作性能和效率。

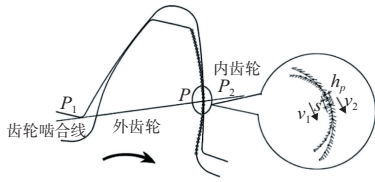


图7 摩擦啮合过程示意图

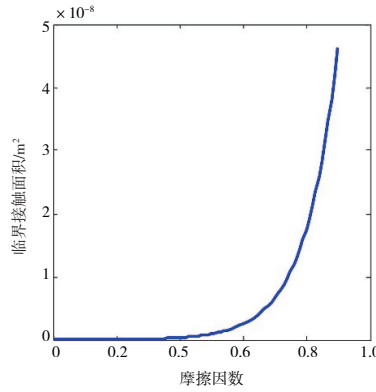


图8 受摩擦因数影响的临界接触面积

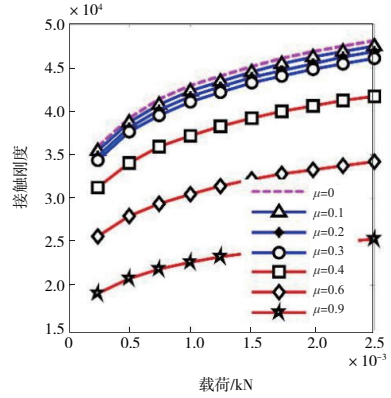


图9 接触刚度受摩擦因数的影响

### 3 考虑摩擦因素的齿轮啮合刚度模型

齿轮啮合面摩擦对齿轮冲击行为、疲劳和振动现象有明显影响,会导致应力的局部集中<sup>[34-36]</sup>。因此,为了反映摩擦因素对啮合行为的影响,学者们建立了多种基于粗糙表面相对摩擦啮合的啮合刚度模型,主要分为统计学模型、数值分析模型、分形接触理论模型。

#### 3.1 考虑摩擦因素的统计学啮合刚度模型

统计学模型即采用高斯分布为主的统计学知识对粗糙表面微凸体间的弹性、塑性变形过程进行研究从而计算啮合刚度的模型。1966年, GREENWOOD 和 WILLIAMSON 将随机分布大量复杂粗糙点的真实表面简化为被简单粗糙微凸体覆盖的粗糙统计表面。同时,两位学者基于实验法提出 3 个基本假设:1)粗糙表面为各向同性;2)接触微

凸体为球形;3)它们具有均匀的半径,半径随机变化满足高斯分布。在此基础上建立 G-W 模型<sup>[37]</sup>,被视为统计学模型的先驱。1967年, GREENWOOD 和 TRIPP 将两粗糙表面间的接触(图 10(a))等效为刚性光滑平面与粗糙微凸体表面间的接触(图 10(b)—图 10(d))<sup>[38]</sup>。1972年, PULLEN 和 WILLIAMSON 发现了粗糙表面微凸体的塑性变形过程,使用统计学分析塑性变形过程,填补了 G-W 模型的不足<sup>[39]</sup>。4 位学者的研究为后来学者利用统计学模型研究考虑摩擦因素的啮合刚度奠定了理论基础。1987年, CHANG、ETSION 和 BOGY 基于 G-W 模型,考虑到粗糙接触表面的预应力条件,引入静摩擦因素。通过计算剪切粗糙接触表面所需摩擦力,对大载荷下两粗糙表面间的塑性变形进行研究,得出了静摩擦因数随着法向载荷的增大而减小的结论。在此基础上提出,即经典 CEB 摩擦模型<sup>[40]</sup>,如式(5)—式(6)所示,成为后续利用统计学研究考虑摩擦因素啮合刚度模型的先驱。

$$K = \left[ \frac{PE}{\eta A_n} - \frac{4}{3} ER^{0.5} \int_d^{d+\omega_c} (z-d)^{1.5} \varphi(z) dz \right] / \left\{ \pi RH \int_{d+\omega_c}^{\infty} [2(z-d) - \omega_c] \varphi(z) dz \right\} \quad (5)$$

$$P = \frac{\eta A_n}{\mu} \int_d^{d+\omega_c} \frac{4}{3} ER^{0.5} (z-d)^{1.5} \varphi(z) dz + \eta A_n \int_{-\infty}^{\infty} F_s(z-d) \varphi(z) dz \quad (6)$$

式中:K为接触刚度;P为接触载荷;μ为摩擦因数;η为面密度;A<sub>n</sub>为实际接触面积;F<sub>s</sub>(·)为黏附力函数;R为曲率半径;ω<sub>c</sub>为微凸体临界接触面积;z为微凸体高度;φ(z)为高度分布函数;H和E为材料参数;d为微凸体变形面积。

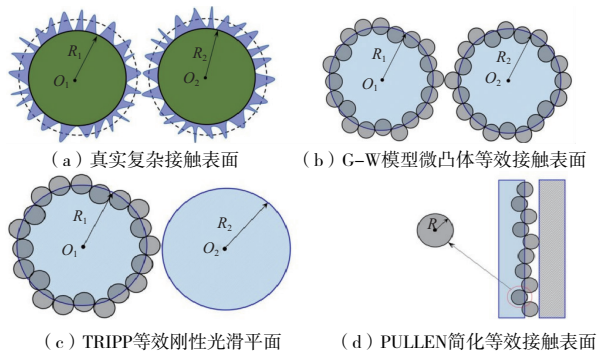


图10 粗糙啮合表面及其等效表面

然而,统计学刚度模型对采样长度和仪器分辨率依赖性较强,这导致在处理粗糙摩擦表面间啮合问题时研究结果会出现较大波动,精度无法保证。需要进一步研究如何提高模型稳定性。

#### 3.2 考虑摩擦因素的数值分析啮合刚度模型

在统计学模型基础上,后续学者引入以多项式插值法为主的数值分析知识,建立了精度更高的数值分析模型。2000年,为修正 CEB 摩擦模型在接触行为由弹性阶段到塑性阶段过渡时存在不连续性且存在低估最大静摩擦力的缺陷, ZHAO、MALETTA 和 CHANG 将数值分析方法引入 CEB 摩擦模型,在统计学方法的基础上采用多项式插值法研究弹性阶段的变形过程,确定了弹性阶段的构成关系,建立了 ZMC 数值分析刚度模型<sup>[41]</sup>,被视为数值分析模型的先驱。式(7)—式(8)为 ZMC 模型接触总载荷公式及总接触面积公式,联立求解可得啮合刚度。

$$W_t(d) = \frac{4}{3} \eta A_n ER^{0.5} \int_{d_c}^{d_c+\omega_1} \omega^{1.5} \varphi(z) dz + 2\eta A_n \pi HR \int_{d_c+\omega_2}^{\infty} \omega \varphi(z) dz + \eta A_n \pi R \int_{d_c+\omega_1}^{d_c+\omega_2} H - H(1-K) \omega \left[ 1 - 2 \left( \frac{\omega - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \right)^3 + 3 \left( \frac{\omega - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \right)^2 \right] \varphi(z) dz \quad (7)$$

$$A_t(d) = \eta A_n \pi R \int_{d_c}^{d_c+\omega_1} \omega \varphi(z) dz + \eta A_n \pi R \int_{d_c+\omega_1}^{d_c+\omega_2} \omega \left[ 1 - 2 \left( \frac{\omega - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \right)^3 + 3 \left( \frac{\omega - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \right)^2 \right] \varphi(z) dz + 2\eta A_n \pi R \int_{d_c+\omega_2}^{\infty} \omega \varphi(z) dz \quad (8)$$

式中:  $W_t(d)$  为总接触载荷;  $\omega_1, \omega_2$  分别为弹塑性临界接触面积和塑性临界接触面积;  $\eta$  为分布函数;  $A_t(d)$  为总接触面积;  $A_n$  为实际接触面积;  $R$  为曲率半径;  $E, H$  为材料参数;  $\varphi(z)$  为高度分布函数;  $K$  为接触刚度;  $\omega$  为微凸体变形面积;  $z$  为微凸体高度;  $d_c$  为微凸体原始面积与变形面积差值。

但是, 该数值分析模型并未清晰界定弹性阶段和塑性阶段间的不连续性。因此, 为建立精确载荷-位移关系,

$$K = \frac{3P}{2\pi A_n H \beta \omega_c} \left\{ \int_{d_c}^{d_c+\omega_c} I^{1.5} + 1.03 \int_{d_c}^{d_c+6\omega_c} I^{1.425} + 1.4 \int_{d_c+6\omega_c}^{d_c+110\omega_c} I^{1.263} + \frac{3}{K} \int_{d_c+110\omega_c}^{\infty} I^1 \right\} \quad (9)$$

$$I^b = \left( \frac{z-d_c}{\omega_c} \right)^b \varphi(z) dz \quad (10)$$

式中:  $K$  为接触刚度;  $P$  为接触载荷;  $A_n$  为实际接触面积;  $\beta$  为表面粗糙度参数;  $H$  为材料参数;  $\omega_c$  为临界接触面积;  $I$  为作者定义参数;  $b$  为 1、2 等实数;  $z$  为微凸体高度;  $d_c$  为微凸体原始面积与变形面积差值。

基于上述考虑摩擦因素的数值分析接触刚度模型, JIANG 等<sup>[44]</sup> 建立 6 自由度斜齿轮数值分析刚度模型, 通过分析滑动摩擦和啮合刚度来研究发生轮齿剥落缺陷的斜齿轮对的动态特性。SAXENA 等<sup>[10]</sup> 提出一种基于计算机的数值分析刚度模型, 分析摩擦对齿轮副总啮合刚度的影响, 结果证明齿轮摩擦会对啮合刚度产生显著影响。然而, 数值分析刚度模型精度与所用数学分析方法有较大关联, 通用性较差。这些缺陷导致数值分析模型在齿轮粗糙表面摩擦啮合领域实用性较差<sup>[45-47]</sup>。因此如何建立稳定、高效、精准、通用的数值分析刚度模型需要进一步研究。

### 3.3 考虑摩擦因素的分形接触理论啮合刚度模型

相比于上述两类模型, 基于分形理论的分形接触模型在各类机械粗糙表面上适用性均较好, 因此被广泛用于研究齿轮粗糙啮合表面间的摩擦性能。1957 年, ARCHARD 首次提出分形面概念<sup>[48]</sup>。1967 年, MANDELBROT 揭示出英国海岸线具有连续但不可分特征, 无论放大与否都具有自相似性<sup>[49]</sup>。在此基础上, 1990 年, MAJUMDAR 和 BUSHAN 应用 WEIERSTRASS 和 MANDELBROT (W-M) 分形函数(式(11))与分形理论描述接触面变形, 建立了经典的 MB 模型<sup>[50]</sup>。

$$z(x) = G^{D-1} \sum_{n_{\min}}^{n_{\max}} \frac{\cos(2\pi \gamma^n x)}{\gamma^{(2-D)n}} e^{jnt} \quad (11)$$

式中:  $z(x)$  为分形函数;  $D$  为分形维数;  $G$  为以长度为单位

KOGUT 和 ETSION 采用有限元分析法模拟可变形微凸体与刚性平面间的弹塑性接触, 得到单个微凸体的实际接触载荷、摩擦力及剪切系数的参数表达式。两位学者运用有限元法指出 CEB 摩擦模型低估了塑性阶段接触力大小, 同时指出 ZMC 模型低估了弹塑性阶段接触力大小, 并用有限元法证明了 ZMC 模型未能改善 CEB 摩擦模型的不连续性, 在此基础上形成了 KE 数值分析模型<sup>[42-43]</sup>, 如式(9)~式(10)所示。

的恒定缩放参数;  $n$  为频率指数;  $n_{\min}$  为低截止频率, 由粗糙面决定;  $n_{\max}$  近似为无限大;  $\gamma$  由频谱密度决定, 一般取 1.5;  $e^{jnt}$  为复指数。

该模型指出粗糙表面上微凸体由塑性变形阶段过渡到弹性变形阶段<sup>[50]</sup>, 该结论与经典接触力学相反。因此, MORAG 和 ETSION 对 MB 模型进行修改, 提出与经典接触力学一致的分形表面接触模型 ME 模型<sup>[51]</sup>, 如式(12)与图 11 所示。

$$k = \frac{dP}{d\omega} = 2E\sqrt{R}\omega^{0.5} = 2E\sqrt{R}G \frac{D-1}{2} l^{\frac{3-D}{2}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi l_t}{2l}\right) \right]^{0.5} \quad (12)$$

式中:  $P$  为接触压力;  $\omega$  为微凸体接触面积;  $k$  为微凸体接触刚度;  $E$  为综合弹性模量;  $D$  为分形维数;  $G$  为以长度为单位的恒定缩放参数;  $l$  为微凸体底部直径;  $R$  为曲率半径;  $l_t$  为变形后微凸体顶部直径。

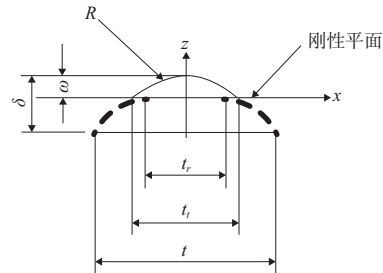


图 11 微凸体与刚性平面接触示意图

在 ME 分形模型基础上, PAN 等<sup>[52]</sup> 根据分形理论建立了适合干摩擦粗糙表面的分形啮合刚度模型; 他们发现摩擦对齿轮结构的自然频率有显著影响, 且摩擦力对整个结构的自然频率有显著的影响。LIU<sup>[53]</sup> 通过修正现有啮合刚度分形模型, 推导出适用于微线段齿轮的分形模型。分析结果表明: 无摩擦条件下, 法向啮合刚度达到最大, 随着摩擦因数的增大啮合刚度逐渐减小。SUN 等<sup>[54]</sup> 指出目前基于分形理论的啮合刚度模型大多以粗糙体啮合面积

对应的尺寸或样本长度作为粗糙体的基直径来描述粗糙体的初始轮廓,以此为理论基础得到的微凸体变形机理不正确。针对这一问题,提出了一种基于分形维数  $D$  的粗糙表面啮合刚度分形表征方法,建立了独立于测量尺度的分形啮合刚度模型,从而获得更精确的粗糙面变形。后续学者进一步证明该模型适用于齿轮啮合刚度的计算。但国内外对不同分形尺寸与分形粗糙度间的复杂关系以及二者对啮合刚度共同影响的研究均较少,需要进一步关注。此外,针对分形模型在弹塑性阶段的具体应用,国内外也存在争议,需要进一步研究。

## 4 考虑摩擦因素的啮合刚度模型在齿轮研究领域的应用

考虑摩擦因素的齿轮啮合刚度模型的应用可以为齿轮传动系统的研究、设计和优化提供重要依据。常见应用主要有有限元仿真应用、多体动力学应用、流体-结构耦合应用等。

有限元仿真通过建立齿轮系统的几何模型和有限元模型,考虑齿形误差、啮合等因素,计算轮齿的应力分布和变形量等参量。在考虑摩擦因素的情况下,采用基于摩擦换算的计算方法,将摩擦力作用到啮合刚度模型中,引入有限元模型中建立合理啮合副进行仿真,可提高仿真准确度。OUYANG 等<sup>[55]</sup> 基于傅里叶级数利用摩擦换算方法建立啮合刚度数值分析模型,以傅里叶级数形式导出啮合刚度与静态传动误差,如式(13)~式(14)所示。在此基础上建立研究高速直齿轮润滑状态与摩擦动态性能的有限元模型。仿真结果表明,高速状态下,摩擦力与摩擦转矩会影响齿轮的动态特性,低速时可忽略不计,合理设置转矩可以减少动态传动误差。

$$k_m(t) = k_0 + \sum_{n=1}^8 k_n \cos(n\omega_m t + \gamma_n) \quad (13)$$

$$e(t) = e_0 + \sum_{n=1}^8 e_n \cos(n\omega_m t + v_n) \quad (14)$$

式中: $k_m(t)$ 为啮合刚度; $e(t)$ 为传动误差; $k_0$ 为初始啮合刚度; $e_0$ 为初始传动误差; $k_n$ 为第  $n$  次啮合刚度; $e_n$ 为第  $n$  次传动误差; $\gamma_n$ 为第  $n$  次啮合相位角; $v_n$ 为第  $n$  次传动误差相位角; $\omega_m$ 为接触面积。

在有限元模型仿真中应用考虑摩擦因素的啮合刚度模型,可大大提高齿轮系统仿真精度。此外,在研究具有实际啮合刚度和齿面滑动摩擦的连续啮合齿轮的动态啮合特性方面应用该类模型,可为考虑更多影响因素的齿轮振动机理研究和动态设计提供有效参考。

多体动力学研究通过建立齿轮系统的运动学和动力学模型,考虑齿形误差、摩擦因数等因素,计算齿轮之间的相对位移和速度,进而获得振动速度、加速度等动力学特征。在多体动力学建模过程中,可利用考虑摩擦因素啮合刚度模型,将摩擦力作用到齿轮系统的运动方程中,减少操作复杂性,提高精度。HAN 等<sup>[28]</sup> 通过数值算法揭示了表面粗糙度、传递载荷和转速等工况对斜齿轮副摩擦因数和啮合刚度的影响规律,建立包括摩擦激励在内的 8 自由度动力学模型(图 12),并分析了不同工况下摩擦与啮合刚度的相互作用。结果表明,整个啮合周期内,交互作用

对动态响应的影响不一致。

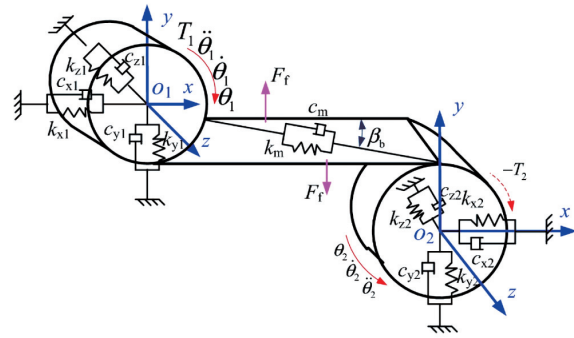


图 12 斜齿轮副多体动力学模型

在多体动力学中应用考虑摩擦因素的啮合刚度模型,可使所建立的多体动力学模型更加贴合物理实体,增加结果可信度。

流体-结构耦合研究通过建立齿轮系统的流体和结构模型,考虑摩擦力对润滑油膜的影响,计算啮合副的流体阻尼等参量。在流体-结构耦合仿真中,可以采用润滑油膜的摩擦啮合刚度模型,将摩擦力作用到流体运动方程中进行仿真。ZHOU 等<sup>[56]</sup> 建立了考虑法向与切向影响的油膜刚度阻尼模型,如式(15)、图 13 所示。将该模型应用于线啮合弹流润滑齿轮传动中,分析线啮合弹流润滑齿轮传动的啮合力、转速以及齿数对啮合刚度和阻尼的影响。结果表明,合理设置油膜刚度可减轻啮合冲击及剪切振动。

$$k_i = \frac{B\Delta^k \sum \Delta p(x,t)}{\frac{1}{n} \sum \Delta h(x,t)} \quad (15)$$

式中: $B$ 为接触点宽度; $\Delta$ 为增量; $\Delta^k$ 为网格间距; $p(x,t)$ 为压强方程; $h(x,t)$ 为薄膜方程; $n=1,2$ 等常数。

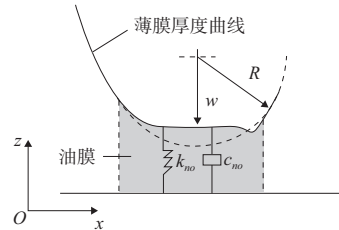


图 13 油膜刚度阻尼模型

以上 3 种应用均能够考虑摩擦因素对啮合刚度的影响,可以快速有效地评估不同材料、不同几何形状和工况下受摩擦特性影响的动态响应,在齿轮传动系统的设计和优化中具有重要应用价值。

## 5 结语

综上所述,考虑摩擦因素的齿轮啮合刚度研究已经成为国内外学术界的热点之一。未来,需要更深入地研究齿轮啮合刚度的摩擦特性,探究高效、精准和可靠的齿轮摩擦啮合刚度建模方法。

1) 统计学刚度模型对采样长度和仪器分辨率依赖性

强,这导致在处理粗糙摩擦表面间啮合问题时研究结果会出现较大波动,精度无法保证。数值分析刚度模型精度与所用数学分析方法有较大关联,通用性较差。这些缺陷导致上述两类模型针对齿轮粗糙表面摩擦啮合问题的实用性较差。因此如何减少对仪器的依赖,建立稳定、高效、精准、通用的统计学刚度模型和数值分析刚度模型需要进一步研究。

2)分形模型是应用最广泛的模型,但国内外对不同分形尺寸与分形粗糙度间的复杂关系以及二者对啮合刚度共同影响的研究均较少,需要进一步关注。此外,针对分形模型在弹塑性阶段的具体应用,国内外也存在争议,需重点研究。

#### 参考文献:

- [1] 杨勇,王家序,周青华,等. 考虑摩擦的磨损和修形齿轮啮合刚度计算[J]. 工程科学与技术,2018,50(2):212-219.
- [2] LU Z D, CHEN Y X, ZU T P. A spalling evolution model for time-varying mesh stiffness evaluation and service life prediction of gears[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 193:110227.
- [3] LIU L, ZHU L Y, GOU X F. Modeling and analysis of load distribution ratio and meshing stiffness for orthogonal spur-face gear drive under point contact[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 182:105239.
- [4] XIE C Y, YU W. Gear dynamic modelling based on the concept of dynamic mesh stiffness; theoretical study and experimental verification[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2022, 36(10):4953-4965.
- [5] DOĞAN O, KARPAT F, KOPMAZ O, et al. Influences of gear design parameters on dynamic tooth loads and time-varying mesh stiffness of involute spur gears[J]. Sūdhānā, 2020, 45(1):258.
- [6] LIU Z F, ZHANG T, ZHAO Y S, et al. Time-varying stiffness model of spur gear considering the effect of surface morphology characteristics[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering, 2019, 233(2):242-253.
- [7] CHEN S Y, TAN R L, GUO X D, et al. Nonlinear mesh stiffness model using slice coupling for straight bevel gear considering axial mesh force component and extended tooth contact [J]. Meccanica, 2022, 57(10):2567-2590.
- [8] LIU Y H, SHI Z Q, LIU X A. Mesh stiffness model for spur gear with opening crack considering deflection [J]. Engineering Failure Analysis, 2022, 139:106518.
- [9] ZHOU C J, DONG X J, WANG H B, et al. Time-varying mesh stiffness model of a modified gear-rack drive with tooth friction and wear[J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2022, 44(5):1-16.
- [10] SAXENA A, PAREY A, CHOUKSEY M. Effect of shaft misalignment and friction force on time varying mesh stiffness of spur gear pair[J]. Engineering Failure Analysis, 2015, 49:79-91.
- [11] JONES I A, WANG P. Complete fringe order determination in digital photoelasticity using fringe combination matching [J]. Strain,2003,39(3):121-130.
- [12] RAGHUWANSHI N K, PAREY A. Experimental measurement of mesh stiffness by laser displacement sensor technique [J]. Measurement, 2018, 128:63-70.
- [13] PANDYA Y, PAREY A. Experimental investigation of spur gear tooth mesh stiffness in the presence of crack using photoelasticity technique [J]. Engineering Failure Analysis, 2013, 34:488-500.
- [14] RAGHUWANSHI N K, PAREY A. Experimental measurement of gear mesh stiffness of cracked spur gear by strain gauge technique[J]. Measurement, 2016, 86(5):266-275.
- [15] DAI H, LONG X H, CHEN F. An improved analytical model for gear mesh stiffness calculation [J]. Mechanism and Machine Theory,2021, 159:94-114.
- [16] WANG G J, LUO Q, ZOU S D. Time-varying meshing stiffness calculation of an internal gear pair with small tooth number difference by considering the multi-tooth contact problem [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2021, 35(9):4073-4083.
- [17] FENG S, CHANG L H, HE Z X. A hybrid finite element and analytical model for determining the mesh stiffness of internal gear pairs[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2020,34(6):2477-2485.
- [18] PEHLIVANOGLU Y, AYDOGAN M O, SABUNCUOGLU B. Mesh stiffness of micro-spur gears by finite element formulations based on modified couple stress theory [J]. Microsystem Technologies,2020,26(12):3829-3838.
- [19] CORNELL R W. Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth[J]. Journal of Mechanical Design, 1981, 103(2):447-459.
- [20] CHAARI F, FAKHFAKH T, HADDAR M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness[J]. European Journal of Mechanics - A, 2009,28(3):461-468.
- [21] CHANG L H, LIU G, WU L Y. A robust model for determining the mesh stiffness of cylindrical gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 87:93-114.
- [22] YANG D C H, LIN J Y. Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics [J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1987, 109(2):189-196.
- [23] TIAN X H. Dynamic simulation for system response of gearbox including localized gear faults[D]. Edmonton, Alberta, Canada: University of Alberta, 2004.
- [24] SAINOT AND P, VELEX P, DUVERGER O. Contribution of gear body to tooth deflections—a new bidimensional analytical formula[J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(4):748-752.
- [25] LIANG X H, ZUO M J, PANDEY M. Analytically evaluating the influence of crack on the mesh stiffness of a planetary gear set[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 76(6):20-38.
- [26] ZHOU X J, SHAO Y M, LEI Y G, et al. Time-varying meshing stiffness calculation and vibration analysis for a 16DOF dynamic model with linear crack growth in a pinion [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2012, 134(1):1-11.
- [27] LUO W, QIAO B J, SHEN Z X, et al. Time-varying mesh stiffness calculation of a planetary gear set with the spalling defect under sliding friction[J]. Meccanica, 2020, 55(1):245-260.
- [28] HAN L, QI H J. Dynamic response analysis of helical gear pair considering the interaction between friction and mesh

- stiffness[J]. *Meccanica*,2019,54(15):2325-2337.
- [29] TABOR D. Friction—the present state of our understanding[J]. *Journal of Lubrication Technology*,1981,103(2):169-179.
- [30] CHEN Q, XU F, LIU P. Research on fractal model of normal contact stiffness between two spheroidal joint surfaces considering friction factor[J]. *Tribology International*, 2016, 97: 253-264.
- [31] XIA Y, WAN Y, LIU Z Q. Bifurcation and chaos analysis for a spur gear pair system with friction[J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*,2018,40(11):1-19.
- [32] FANG Y N, LIANG X H, ZUO M J. Effects of friction and stochastic load on transient characteristics of a spur gear pair[J]. *Nonlinear Dynamics*,2018,93(2):599-609.
- [33] 刘鹏,赵韩,黄康,等. 线段齿轮法向接触刚度的改进分形模型研究[J]. *机械工程学报*,2018,54(7):114-122.
- [34] PUNDIR M, ANCIAUX G. Numerical generation and contact analysis of rough surfaces in concrete [J]. *Journal of Advanced Concrete Technology*,2021,19(7):864-885.
- [35] GRABOWSKI A, NITKA M, TEJCHMAN J. 3D DEM simulations of monotonic interface behaviour between cohesionless sand and rigid wall of different roughness[J]. *Acta Geotechnica*,2021,16(4):1001-1026.
- [36] MENG J J, DU X, LI Y M, et al. A multiscale accuracy degradation prediction method of planetary roller screw mechanism based on fractal theory considering thread surface roughness[J]. *Fractal and Fractional*,2021,5(4):237.
- [37] GREENWOOD J, WILLIAMSON J. Contact of nominally flat surfaces[J]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*,1966,295:300-319.
- [38] GREENWOOD J A, TRIPP J H. The elastic contact of rough spheres[J]. *Journal of Applied Mechanics*,1967,34(1):153-159.
- [39] PULLEN J, WILLIAMSON J B P. Fragmentation of shell cases [J]. *Proceedings of the Royal Society of London*,1972,327:159-173.
- [40] CHANG W R, ETSION I, BOGY D B. Static friction coefficient model for metallic rough surfaces [J]. *Journal of Tribology*, 1988,110(1):57-63.
- [41] ZHAO Y, MARIETTA D M, CHANG L. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow[J]. *Journal of Tribology*, 2000, 122:479-480.
- [42] KOGUT L, ETSION I. Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat[J]. *Journal of Applied Mechanics*,2002,69(5):657-662.
- [43] KOGUT L, ETSION I. A semi-analytical solution for the sliding inception of a spherical contact[J]. *Journal of Tribology*,2003,125(3):499-506.
- [44] JIANG H J, SHAO Y M, MECHEFSKE C K. Dynamic characteristics of helical gears under sliding friction with spalling defect[J]. *Engineering Failure Analysis*,2014,39:92-107.
- [45] YUAN Y, CHEN J J, ZHANG L H. Loading-unloading contact model between three-dimensional fractal rough surfaces [J]. *AIP Advances*,2018,8(7):075017.
- [46] PAN W J, SONG C X, LING L Y, et al. Unloading contact mechanics analysis of elastic-plastic fractal surface[J]. *Archive of Applied Mechanics*,2021,91(6):2697-2712.
- [47] WANG H H, JIA P, WANG L Q, et al. Research on the loading-unloading fractal contact model between two three-dimensional spherical rough surfaces with regard to friction [J]. *Acta Mechanica*,2020,231(10):4397-4413.
- [48] ARCHARD J F. Elastic deformation and the laws of friction[J]. *Royal Society*, 1957, 243:190-205.
- [49] MANDELBROT B. How long is the coast of Britain? statistical self-similarity and fractional dimension[J]. *Science*,1967,156(3775):636-638.
- [50] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces[J]. *Journal of Tribology*,1990,112(2):205-216.
- [51] MORAG Y, ETSION I. Resolving the contradiction of asperities plastic to elastic modetransition in current contact models of fractal rough surfaces[J]. *Wear*, 2007, 262:624-629.
- [52] PAN W, LI X, WANG L, GUO N. A normal contact stiffness fractal prediction model of dry-friction rough surface and experimental verification[J]. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2018, 66:94-102.
- [53] LIU P. Research on normal contact stiffness of micro-segments gear based on improved fractal model[J]. *Journal of Mechanical Engineering*,2018,54(7):114.
- [54] SUN J J, JI Z B, ZHANG Y Y, et al. A contact mechanics model for rough surfaces based on a new fractal characterization method[J]. *International Journal of Applied Mechanics*,2018,10(6):1850069.
- [55] OUYANG T, HUANG G C, CHEN J X, et al. Investigation of lubricating and dynamic performances for high-speed spur gear based on tribo-dynamic theory [J]. *Tribology International*, 2019, 136:421-431.
- [56] ZHOU C J, XIAO Z L. Stiffness and damping models for the oil film in line contact elastohydrodynamic lubrication and applications in the gear drive [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, 61:634-649.

---

收稿日期:2023-05-09