

含干摩擦耗散结构的非线性模态分析方法研究

王相乾

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 江苏 南京 210016)

摘要:建立了含干摩擦耗散特性的阻尼器结构非线性模态高效分析方法。以干摩擦梁模型为例,综合采用多谐波平衡法及雅可比矩阵快速计算方法,实现含干摩擦梁模型的非线性模态高效分析,提出通过模态应变能法对非线性模态阻尼比计算结果进行验证的技术途径。结果表明:所建立的含干摩擦耗散特性结构的非线性模态高效分析方法能够有效揭示非线性模态频率与非线性模态阻尼比的振幅相关性,可以直接评估干摩擦阻尼能力,为后期干摩擦装置的动力学设计和优化提供理论指导。

关键词: 阻尼器; 干摩擦; 非线性模态; 多谐波平衡法; 模态应变能法

中图分类号: V231.92 **文献标志码:** B **文章编号:** 1671-5276(2023)06-0098-04

Nonlinear Modal Analysis of Dissipative Structures with Dry Friction

WANG Xiangqian

(College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: An efficient nonlinear modal analysis method for dampers with dry friction dissipation characteristics was established. With a beam model of a dry friction element as an example, the multi-harmonic balance method and jacobian matrix fast calculation method were adopted to realize the efficient nonlinear modal analysis of the beam model with a dry friction element, and a technical approach verifying the calculation results of nonlinear modal damping ratio by modal strain energy method was proposed. The results show that the proposed method can effectively reveal the amplitude correlation between nonlinear modal frequency and nonlinear modal damping ratio, and can directly evaluate the dry friction damping capacity, which provides theoretical guidance for the design and optimization of dry friction structures in the future.

Keywords: dampers; dry friction; nonlinear modal; multi-harmonic balance method; modal strain energy method

0 引言

干摩擦阻尼以其不受温度限制、结构简单、减振效果明显的特点而广泛应用于摩擦叶片、空间结构等机械结构中^[1],以达到减振目的。含干摩擦结构的模态特性,即模态频率和由干摩擦现象引起的模态阻尼比,是结构动力学设计工作中的重要关注点。然而,干摩擦导致的强非线性耗散特性,给含干摩擦结构的模态特性预测和分析带来了困难。

为了求解非线性模态,ROSENBERG^[2]提出非线性正则模态(nonlinear normal mode, NNM)的概念,将非线性模态定义为非线性无阻尼自治系统的同步周期振动。基于非线性正则模态的定义,衍生出多种解析计算方法,如多尺度法、正规形法等。然而这些方法各有不同的适用范围,且计算效率低,很难应用于实际复杂结构,因此需利用数值求解方法计算各种非线性结构的非线性模态。基于非线性正则模态的定义,SLATER^[3]通过 Runge - Kutta 法,首次通过数值方法求解非线性模态。随后,LEE 等^[4]通过打靶法,提出了更高效稳定的非线性模态求解方法。

前人的研究主要针对保守系统的非线性模态。对于

含干摩擦耗散特性的结构,其在初始扰动作用下的自由振动并不具备周期性特征。故而上述非线性正则模态的定义并不适用含干摩擦耗散因素的结构。KRACK^[5]通过人为引入负阻尼项用于补偿由于干摩擦非线性所致的能量耗散,将非线性正则模态理论拓展应用于非线性耗散系统,由此形成了阻尼非线性模态(damped nonlinear normal mode, dNNM)的概念。基于非线性模态理论的发展,国外已经开始着眼于基于非线性模态对结构动力学分析与设计的应用基础研究,而国内这方面的研究比较少见。

本文以含干摩擦梁结构为例,基于阻尼非线性模态的定义,建立了含干摩擦耗散结构的非线性模态高效数值分析方法体系,并提出了通过模态应变能法对非线性模态阻尼比计算结果进行验证的技术途径。

1 理论方法

本文以图 1 所示含干摩擦单元的简单梁元模型为研究对象(其中 Ω 为激振频率),开展含干摩擦耗散特性结构的非线性模态分析方法研究。该模型由 7 个梁单元构成,干摩擦力由库仑摩擦定律确定,如图 2 所示。其主要参数见表 1。

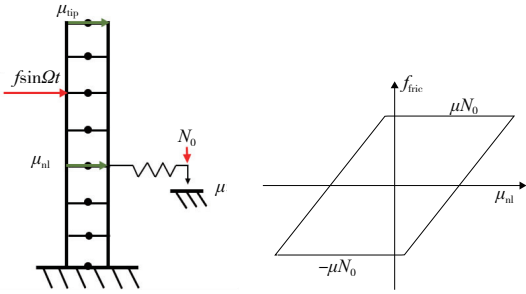


图1 带干摩擦单元的梁结构 图2 干摩擦力迟滞回线

表1 模型参数

参数	值
弹性模量 E/GPa	185
长度 L/m	0.7
密度 $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	7 830
摩擦因数 μ	0.2
初始法向正压力 N_0/N	5

1.1 含干摩擦非线性耗散系统的阻尼非线性模态

非线性模态(NNM)定义与线性系统类似。它被定义为非线性保守系统在不考虑外力和黏性阻尼力作用时,因受到初始扰动而产生的周期性自由振动。其动力学方程如下:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, t) = 0 \quad (1)$$

式中: \mathbf{M} 和 \mathbf{K} 代表系统的质量矩阵和刚度矩阵; \mathbf{u} 代表系统位移; t 代表时间; $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, t)$ 代表不具有能量耗散性的非线性力,例如由于几何非线性所致的弹性恢复力 \mathbf{u}^3 。

对于含干摩擦梁结构,其非线性力变为具有耗散特性的干摩擦力 $\mathbf{f}_{fric}(\mathbf{u}, t)$ 。受此影响,在初始扰动作用下自由振动将演变为振幅不断衰减的准周期性振动,原有非线性保守系统的非线性模态计算方法不再适用。为此,本文通过引入新的阻尼非线性模态(dNNM),将非线性耗散系统的自由衰减准周期性振动恢复为周期性自由振动。具体方法是通过人为引入负比例阻尼项 $\mathbf{C}_d\dot{\mathbf{u}}$,以补偿由于干摩擦力所耗散的能量。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_d\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{f}_{fric}(\mathbf{u}, t) = 0 \quad (2)$$

式中: $\mathbf{C}_d = -2\omega\zeta\mathbf{M}$,代表与质量矩阵相关的负比例阻尼矩阵,其中 ω 和 ζ 分别代表非线性模态频率与非线性模态阻尼比。

由此,针对含干摩擦非线性耗散系统的阻尼非线性模态(dNNMs)振动可定义为方程(2)所描述的非线性系统在初始扰动作用下的周期性自由振动。可以看出,基于此方法不仅可以计算得到系统的非线性模态频率,还可以直接得到系统模态阻尼比的变化。通过模态阻尼比可以定量评估接触非线性的阻尼能力,为其减振设计提供指引。

1.2 阻尼非线性模态仿真分析方法

为了更好地量化非线性耗散系统的能量相关性,通过引入新的参数模态幅值 a ,方程(2)的周期性位移响应可以表示为 $\mathbf{u}(t) = a\boldsymbol{\Psi}(t)$,将其展开为傅里叶级数形式:

$$\mathbf{u}(t) = a\boldsymbol{\Psi}^0 + a \sum_{k=1}^{N_h} \boldsymbol{\Psi}^{ck} \cos k\omega t + \boldsymbol{\Psi}^{sk} \sin k\omega t \quad (3)$$

式中: N_h 表示截取的谐波阶次;上标 c 代表余弦项;上标 s 代表正弦项。将式(3)中的傅里叶系数归结为向量形式:

$$\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\Psi}^0, \boldsymbol{\Psi}^{c1}, \boldsymbol{\Psi}^{s1}, \dots, \boldsymbol{\Psi}^{ck}, \boldsymbol{\Psi}^{sk}] \quad (4)$$

并定义系数转换矩阵

$$\mathbf{T}(t) = [\mathbf{I}, \cos\omega t\mathbf{I}, \sin\omega t\mathbf{I}, \dots, \cos k\omega t\mathbf{I}, \sin k\omega t\mathbf{I}] \quad (5)$$

式中 \mathbf{I} 为 $N_d \times N_d$ 维单位矩阵,其中 N_d 为自由度数目。

位移解(式(3))可以改写为

$$\mathbf{u}(t) = a\mathbf{T}(t)\boldsymbol{\Psi} \quad (6)$$

引入频域求导算子:

$$\nabla = (\nabla_0, \nabla_1, \dots, \nabla_{N_h}), \nabla_k = k \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

则系统的速度和加速度可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(t) = a\omega\mathbf{T}(t) \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} \\ \ddot{\mathbf{u}}(t) = a\omega^2\mathbf{T}(t) \cdot \nabla^2 \cdot \boldsymbol{\Psi} \end{cases} \quad (8)$$

同理干摩擦力 $\mathbf{f}_{fric}(\mathbf{u}, t)$ 的傅里叶形式为

$$\mathbf{f}_{fric}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{F}_{fric} \quad (9)$$

式中 \mathbf{F}_{fric} 为干摩擦力对应的傅里叶系数向量,可通过时-频域转换技术获取^[6]。

将式(6)一式(9)代入式(2),并通过伽辽金法积分消去与时间项相关的 $\mathbf{T}(t)$,得到由傅里叶系数向量表示的谐波平衡代数方程

$$\mathbf{P}(\omega, \zeta) \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{F}_{fric}(a\boldsymbol{\Psi}) = 0 \quad (10)$$

式中: $\mathbf{P}(\omega, \zeta) = a(\omega^2 \mathbf{N}_M \nabla^2 + \omega \mathbf{N}_C \nabla + \mathbf{N}_K)$; \mathbf{N}_C 是分块对角矩阵, $\mathbf{N}_C = \text{blkdiag}(\mathbf{C}_d, \mathbf{C}_d, \dots)$, \mathbf{N}_M 和 \mathbf{N}_K 的形式与 \mathbf{N}_C 相同。

由于式(10)中未知量数目多于方程数目,需要额外补充条件方能得到其唯一解 $\boldsymbol{\Psi}$ 。首先考虑类似于线性模态的非线性模态振型的质量归一化,即 $\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{N}_M \boldsymbol{\Psi} - 1 = 0$ 。其次,考虑到自由振动响应 $\mathbf{u}(t)$ 的周期性特征,任意满足 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t + \Delta t)$ 条件的解 $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ 也满足式(10),其中 Δt 为某一固定的相位差。为保证自由振动存在唯一周期解,应指定相位条件以消除解的任意性。为取得合适相位条件来进行非线性耗散系统的非线性模态求解,本文使初始速度为0,即 $\dot{\mathbf{u}}(0) = 0$ 。结合式(8)得到其数学表达式为 $a\omega\mathbf{T}(0)\nabla\boldsymbol{\Psi} = 0$ 。

综上,针对计算含干摩擦非线性耗散系统的阻尼非线性模态转化为下列非线性代数方程的求解问题:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(\omega, \zeta) \cdot \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{F}_{fric} = 0 \\ \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{N}_M \boldsymbol{\Psi} - 1 = 0 \\ a\omega\mathbf{T}(0)\nabla\boldsymbol{\Psi} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

上述方程可通过牛顿拉夫逊法迭代求解。 a 起延拓参数的作用,可通过弧长延拓技术高效地追踪获取对应其他模态振幅下的阻尼非线性模态振动。迭代求解过程中,可采用作者前期提出的雅可比矩阵快速计算方法^[7],大幅提高上述非线性代数方程组的求解速度。

1.3 基于模态应变能法的模态阻尼比计算

由于阻尼非线性模态的解可以作为稳态受迫响应被激发,因此系统非线性模态阻尼比也可以从受迫响应结果中得到。在一个完整振动周期内的耗散能量 E_{fric} 可以通过

摩擦力对接触界面上的相对位移的功计算。

$$E_{\text{fric}} = \sum_{i=0}^{2\pi/\Omega} \sum_{k=1}^{N_e} f_{\text{fric}}^{i,k} u_r^{i,k} \quad (12)$$

式中: $u_r^{i,k}$ 为第 i 个时间步长时接触界面的第 k 对接触单元的相对位移; $f_{\text{fric}}^{i,k}$ 为对应的干摩擦力; N_e 是成对接触单元的数目; Ω 代表共振状态时的激励频率。

当结构最大振动幅值为 A 时, 整个结构的应变能为

$$E_j(A) = \frac{(A \varphi_j^H) \mathbf{K} (A \varphi_j)}{2} = \frac{A^2 \omega_{r,j}^2}{2} \quad (13)$$

式中 φ_j 和 $\omega_{r,j}$ 为第 j 阶模态振型和固有频率。

由于模态阻尼比常被定义为每弧度所耗散的能量与系统总能量的比值, 即经历稳态振动 $u_{\text{dNNM}}(\Omega t)$ 的非线性结构的耗散能 E_{fric} 与最大应变能 E_j 的比值^[8]。因此当最大振动幅值为 A 时, 模态阻尼比 $\zeta_{\text{mse},j}$ 的计算如下:

$$\zeta_{\text{mse},j}(A) = \frac{E_{\text{fric}}(A)}{4\pi E_j} = \frac{E_{\text{fric}}(A)}{2\pi A^2 \omega_{r,j}^2} \quad (14)$$

第 j 阶模态下整个结构的模态应变能 $E_j(a_j)$ 可以直接从 ANSYS 模态分析结果中获取。因此, 当最大振动幅值为 A 、对应的模态幅值为 a_j 时, 模态阻尼比 $\zeta_{\text{mse},j}(A)$ 也可以由下式获得:

$$\zeta_{\text{mse},j}(A) = \frac{E_{\text{fric}}(A) (a_j/A)^2}{4\pi E_j(a_j)} \quad (15)$$

通过式 (14) 或式 (15) 能够评估由于摩擦非线性引起的非线性模态阻尼比 $\zeta_{\text{mse},j}$, 同时可以用于检验由阻尼非线性数值计算方法得到的非线性模态阻尼比 ζ_j 的准确性。

2 结果和讨论

2.1 非线性模态分析

将本文建立的非线性模态仿真计算方法应用于图 1 描述的梁模型, 对其进行阻尼非线性模态分析。对应底层线性结构第一弯曲模态梁尖端节点处的非线性模态特性如图 3 和图 4 所示。具有非线性模态频率 ω 和位移幅值的单个 dNNM 表示为图 3 中频率-幅值曲线上的一个点, 并绘制了单个 dNNM 中不同节点 $u(t)$ 的周期运动。

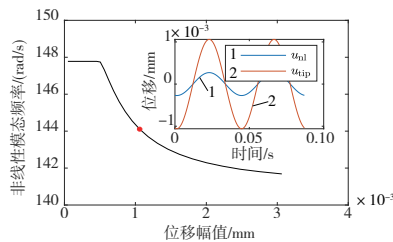


图 3 非线性模态频率

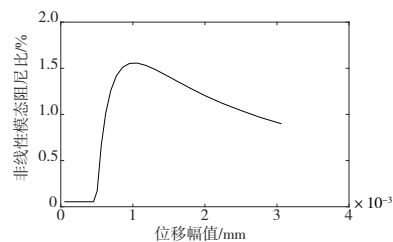


图 4 非线性模态阻尼比

由图 3 和图 4 可以看出, 当系统处于低幅值时, 由于干摩擦单元保持黏滞状态, 产生的摩擦力几乎不影响结构的模态特性。因此非线性模态频率与非线性模态阻尼比处于线性阶段, 非线性模态阻尼比处于极低水平。随着幅值的增加, 干摩擦单元发生黏滑过渡现象, 不断增长的摩擦力导致频率-幅值变化曲线出现刚度软化特征。非线性模态频率急剧下降并显著提高系统的阻尼性能。需要注意的是, 最大模态阻尼比是在中间幅值水平上产生的, 最大约为 1.5%, 这意味着当干摩擦单元处于部分滑动时获得最大的摩擦阻尼性能。当幅值持续增大, 系统非线性模态频率趋于收敛, 非线性模态阻尼比逐渐回落。

2.2 非线性模态与强迫振动响应之间的关联

系统的骨架曲线能够描述非线性系统的频率-能量相关性。骨架曲线是系统在不同激振力作用下, 不同幅频曲线的响应峰值相连得到的曲线。图 5 描述了系统在不同激振力下 ($f_{i+1} > f_i, i=1, \dots, 3$) 的幅频特性曲线。

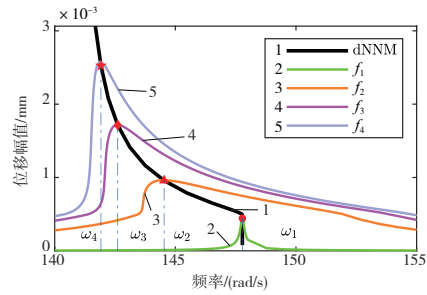


图 5 不同激振力下的幅频曲线

由图 5 观察到非线性模态数值计算方法得到的系统幅值-频率曲线即为骨架线。通过非线性模态幅值-频率曲线可以准确预测系统在不同水平激振力作用下响应峰值的变化轨迹, 避免了繁琐耗时的强迫响应计算。

2.3 非线性模态阻尼比的检验

在强迫振动响应的基础上, 根据 1.3 节介绍的模态应变能方法, 即式 (15) 得到非线性模态阻尼比 ζ_{mse} (用 MSE 表示) 与位移幅值的变化关系, 可以用来评估非线性系统的非线性模态阻尼比 ζ_{mse} , 同时可以用来检验阻尼非线性模态 (dNNM) 计算得到的模态阻尼比 ζ 。图 6 描述了分别通过模态应变能法和阻尼非线性模态计算方法得到的模态阻尼比与位移幅值的变化关系。由图 6 观察到, ζ 和 ζ_{mse} 之间存在良好一致性。因此, 充分证明了本文所建立的阻尼非线性模态分析方法在评估干摩擦阻尼能力方面的有效性。

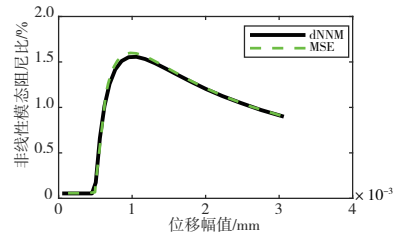


图 6 不同方法下的模态阻尼比变化

3 结语

本文基于阻尼非线性模态理论,综合采用多谐波平衡法、雅克比矩阵快速计算方法等先进数值仿真技术,建立了干摩擦耗散特性结构的非线性模态高效仿真分析方法,为扩展到实际工程结构奠定基础,具有很好的应用价值。主要结论如下:

1) 实现了含干摩擦梁结构的非线性模态分析,揭示其非线性模态频率与非线性模态阻尼比随振幅增长的变化规律,并将非线性模态与强迫振动响应联系,验证了系统在共振区域的响应可以通过非线性模态近似,避免了强迫振动响应的计算;

2) 提出了通过模态应变能法对非线性模态阻尼比计算结果进行验证的技术途径,进而验证了本文建立的非线性模态数值仿真计算方法可以有效评估系统的阻尼能力,为后期干摩擦装置的设计和优化提供指导。

参考文献:

- [1] 郭鑫星,周瑾,曹晓彦,等. 叶片式阻尼器的参数辨识研究[J]. 机械制造与自动化,2021,50(6):37-40,55.
[2] ROSENBERG R M. The normal modes of nonlinear n-degree-

of-freedom systems [J]. Journal of Applied Mechanics, 1962, 29(1):7-14.

- [3] SLATER J C. A numerical method for determining nonlinear normal modes[J]. Nonlinear Dynamics, 1996, 10(1):19-30.
[4] LEE Y S, KERSCHEN G, VAKAKIS A F, et al. Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2005, 204(1/2):41-69.
[5] KRACK M. Nonlinear modal analysis of nonconservative systems: extension of the periodic motion concept [J]. Computers & Structures, 2015, 154:59-71.
[6] 康佳豪,徐超,李东武,等. 基于谐波平衡-时频转换法的摩擦振子稳态响应分析[J]. 振动与冲击, 2020, 39(12):170-176,205.
[7] 阳刚,周标,臧朝平. 含接触界面的叶盘结构强迫振动响应快速预测方法[J]. 航空动力学报, 2019, 34(9):1953-1961.
[8] CHEN J J, ZANG C P, ZHOU B, et al. High-fidelity calculation of modal damping caused by friction at blade roots for single blades and tuned bladed disc assemblies [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2021, 235(15):2810-2831.

收稿日期:2022-05-17

(上接第93页)

- [11] YUE K Y, SUN M, YUAN Y C, et al. Compact generalized non-local network [C]//Proceedings of the 32nd International Conference on Neural Information Processing Systems. New York: ACM, 2018:6511-6520.
[12] LIU D, WEN B H, FAN Y C, et al. Non-local recurrent network for image restoration [C]//Proceedings of the 32nd International Conference on Neural Information Processing Systems. Montréal, Canada. New York: ACM, 2018:1680-1689.
[13] 黄立勤,陈柳清,潘林,等. 结合血管拓扑和 Non-local CNN-GCN 的肺动脉分离方法[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2022, 50(1):24-30.
[14] CHOI J, KRISHNAMURTHY J, KEMBHAVI A, et al. Structured set matching networks for one-shot part labeling [C]//2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Salt Lake City, UT, USA: IEEE, 2018:3627-3636.
[15] QIAO S Y, LIU C X, SHEN W, et al. Few-shot image recognition by predicting parameters from activations [C]//2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Salt Lake City, UT, USA: IEEE, 2018:7229-7238.
[16] VINYALS O, BLUNDELL C, LILLICRAP T, et al. Matching networks for one shot learning [C]//Proceedings of the 30th International Conference on Neural Information Processing Systems. New York: ACM, 2016:3637-3645.
[17] SNELL J, SWERSKY K, ZEMEL R. Prototypical networks for

few-shot learning [C]//Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems. New York: ACM, 2017:4080-4090.

- [18] SUNG F, YANG Y X, ZHANG L, et al. Learning to compare: Relation network for few-shot learning [C]//2018 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Salt Lake City, UT, USA: IEEE, 2018:1199-1208.
[19] FINN C, ABBEEL P, LEVINE S. Model-agnostic meta-learning for fast adaptation of deep networks [C]//Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning - Volume 70. Sydney, NSW, Australia. New York: ACM, 2017:1126-1135.
[20] REN M Y, LIAO R J, FETAYA E, et al. Incremental few-shot learning with attention attractor networks [EB/OL]. (2018-5-25) [2022-4-26] 2018; arXiv: 1810.07218. <https://arxiv.org/abs/1810.07218>.
[21] LIU Y B, LEE J, PARK M, et al. Learning to propagate labels: Transductive propagation network for few-shot learning [EB/OL]. 2018; arXiv:1805.10002. <https://arxiv.org/abs/1805.10002>.
[22] GARCIA V, BRUNA J. Few-shot learning with graph neural networks [EB/OL]. (2017-11-10) [2022-4-26] 2017; arXiv:1711.04043. <https://arxiv.org/abs/1711.04043>.

收稿日期:2022-05-26