

# 基于 MATLAB 多约束磨齿余量调整方法研究与实现

狄成宝,罗有朋,李军,熊小林  
(重庆齿轮箱有限责任公司,重庆 402263)

**摘要:**为提高磨齿阶段齿面均匀化调整的效率,提出一种基于 MATLAB 多约束调整智能计算方法。根据全齿扫描报告数据建立每个齿面的最大和最小包容齿面方程;通过端面调整(端面调整幅值与相位)、径向调整(径向调整幅值与相位)建立齿面变换方程;通过 MATLAB 编程,多次寻优,找到变换包容齿面与基准齿面的余量极值(最大与最小)的变化情况。根据实际工程应用情况,设定约束条件:保证每个齿面都有工艺要求的最小磨齿余量;磨削最大余量后,渗碳层深满足设计要求;齿面余量波动尽可能均匀。通过三维模型验证 MATLAB 程序的准确性。

**关键词:** MATLAB;全齿扫描;齿面余量;多约束

**中图分类号:** TP202+.2    **文献标志码:** B    **文章编号:** 1671-5276(2023)06-0072-05

## Research and Implementation of Multi-constraint Gear Grinding Margin Adjustment Method Based on MATLAB

DI Chengbao, LUO Youpeng, LI Jun, XIONG Xiaolin  
(Chongqing Gearbox Co., Ltd., Chongqing 402263, China)

**Abstract:** To improve the efficiency of tooth surface homogenization adjustment in gear grinding stage, an intelligent calculation method of multi-constraint adjustment based on MATLAB is proposed. According to the data of full-tooth scanning report, the maximum and minimum contained tooth surface equations of each tooth surface are established. The tooth surface transformation equation is established through end face adjustment (end face adjustment amplitude and phase) and radial adjustment (radial adjustment amplitude and phase). By MATLAB programming, the optimal solution is obtained, and the variation of the extreme value (maximum and minimum) of the allowance between the contained tooth surface and the reference tooth surface is found. According to the actual engineering application, the constraint conditions are set as follows: ensuring that each tooth surface meets the minimum grinding allowance required by the process; the first stage head of carburized layer depth meeting the design requirements after grinding the maximum allowance; the fluctuation of gear grinding allowance being as uniform as possible. The accuracy of MATLAB program is verified by three-dimensional model.

**Keywords:** MATLAB; full-tooth scanning; tooth surface margin; multi-constraint

## 0 引言

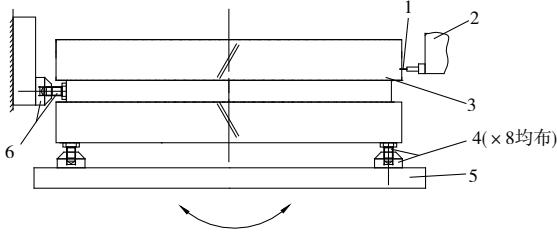
对于一些渗碳淬火的薄壁大齿圈,由于热后变形较复杂,为了使磨齿余量分配更加合理,要求热后精车的找正基准要参照全齿扫描报告进行修正,保证各齿面有余量且余量尽可能分配均匀。随着先进制造技术的发展,磨齿余量均匀化技术大多被集成到磨齿机中。目前主要是利用机床的在机测量系统进行齿面余量检测,然后根据检测数据,通过智能算法进行二次分配,如 KIM 等<sup>[1]</sup>、HUNDT 等<sup>[2]</sup>、KHUOBIN 等<sup>[3]</sup>针对 AE 传感器在磨削加工中的应用进行了研究。刘海宁<sup>[4]</sup>为了解决数控蜗杆砂轮磨齿机余量分配问题,研究了利用 AE 声发射器进行接触信号检测的技术。张国辉和彭宁等<sup>[5-6]</sup>针对数控砂轮磨齿机的余量分配问题,分别介绍了采用高灵敏度 AE 传感器和采用在机测量测头实现磨齿余量智能分配的原理及实现过程。此外,吴彬彬、张虎等<sup>[7-8]</sup>针对数控成形磨齿机在线

测量存在标定误差的问题,通过研究齿廓倾斜偏差与径向标定误差和切向标定误差之间的规律,提出了一种标定误差的辨识和补偿方法,使磨齿余量分配更加准确。而石照耀等<sup>[9]</sup>提出了一种测量渐开线轮廓误差的广义极坐标法,并给出了在法向评定轮廓误差的计算公式,进一步促进了磨齿机余量分配在线技术的发展。另外,刘俊辉等<sup>[10]</sup>提出了一种偏心放置分段齿圈的加工方法,该方法通过几何变换推导偏心放置跳齿加工的补偿量,其核心也是解决齿面余量不均匀的问题。

以上技术主要研究齿轮二维平面内齿面余量分配方式,而在工程应用中发现,齿圈热后变形是十分复杂的,单纯在平面内进行调整很难达到理想的效果,采用最多的是径向调整+端面调整相结合的方式。但是,端面和径向调整对各个齿面余量分配的影响是非线性的,这就导致在工程实践过程中很难摸清其调整规律,光靠经验尝试,执行效率低下,甚至造成误判。因此,迫切需要一种更高效的调整方法。

## 1 数学建模

图 1 为全齿扫描装夹示意图。扫描前,首先通过找正上旋向齿和下旋向齿节圆跳动,通过件 6 和件 4 把齿圈移动到一个预定位置(工艺要求对点跳动值)。然后进行全齿扫描,见图 2。全齿扫描报告记录每个齿面的最大余量值和最小余量值。



1—探头组件;2—磨齿机机架;3—人字齿;  
4—端部千斤顶组件;5—旋转工作台;6—径向千斤顶组件。

图 1 磨床人字齿全齿扫描示意图

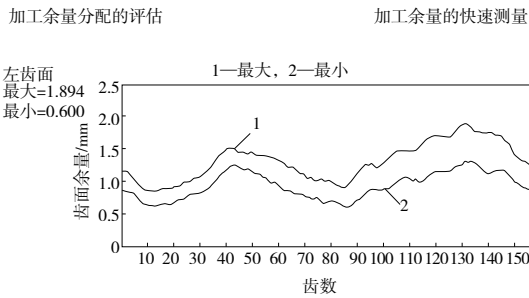


图 2 单旋向单齿面图例

由于热后变形导致齿圈呈现扭曲、锥形、马鞍形、椭圆形等形态,热后变形的不确定性,使磨齿找正难度增大,工程应用中凭借经验,通过径向和端面组合调整,尝试找到一种较优的调整方式。但是,径向和端面调整对齿面余量的影响是非线性的,这会导致齿面调整的效率低下。为了尽快找到一种较优的调整组合,必须先建立径向、端面调整和齿面余量的关系。

### 1.1 变换矩阵的数学模型

由于空间变换矩阵既适用平面体,又适用曲面体,为了便于观察,选取齿轮底面外圆上的点  $P$  为研究对象,推导齿面调整空间变换的通用变换矩阵。

如图 1 所示,令件 4 支撑分布圆为  $d_a$ ,调整时按以下步骤。步骤 1,在  $x_{wj}$  相位处,千斤顶单点抬高幅值为  $t_h$ ;步骤 2,在  $x_{wj}$  相位处,通过径向千斤顶径向移动为  $t_r$ 。其变换示意图如图 3 所示。其中  $P$  点变为  $P'$ ,其坐标点变换等价于以下坐标系变换:1)坐标系按照右手握旋法则绕  $z$  轴旋转  $x_{wj}$ ;2)在 1)中坐标系基础上按照右手握旋法则绕  $y$  轴旋转  $\theta$ ;3)在 2)中坐标系基础上,按照右手握旋法则绕  $z$  轴旋转  $-x_{wj}$ ;4)按照向量  $oo'$  移动;5)按照向量  $t_r$  移动。

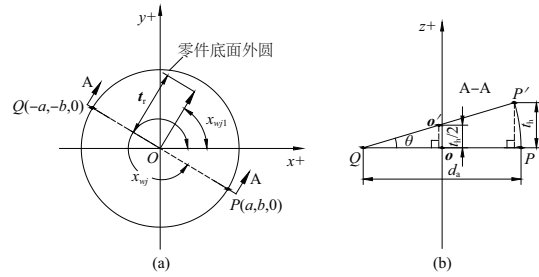


图 3 零件变换示意图

由空间几何知识可知:

步骤 1) 对应的变换矩阵为

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos x_{wj} & \sin x_{wj} & 0 \\ -\sin x_{wj} & \cos x_{wj} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

步骤 2) 对应的变换矩阵为

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中  $\theta = \arcsin(t_h/d_a)$ 。

步骤 3) 对应的变换矩阵为

$$T_3 = T_1^{-1} \quad (3)$$

步骤 4) 对应的变换矩阵为

$$T_4 = \begin{bmatrix} d_a(\cos \theta - 1) \cos \alpha / 2 \\ d_a(\cos \theta - 1) \sin \alpha / 2 \\ t_h / 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

步骤 5) 对应的变换矩阵为

$$T_5 = \begin{bmatrix} t_r \cdot \cos(x_{wj1}) \\ t_r \cdot \sin(x_{wj1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

令某旋向左(右)第  $i$  个齿面的方程  $L_{G,i} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$ , 变换

后的齿面方程可表示为

$$L'_{G,i} = T_3 T_2 T_1 \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + T_4 + T_5 \quad (6)$$

### 1.2 包容齿面的数学模型

由于齿轮热后发生不规则的变形,而在实际的工程应用中,只关注最高点和最低点余量的变化。为了简化热后齿面模型,最大限度地满足工程应用需求,本文把成品齿面通过轴心旋转得到的齿面余量最高点和最低点的包容曲面(图 4)做为研究对象进行阐述。为了便于表达,用右旋左齿面做为案例阐述。

成品齿面方程  $L_{G,i}$  可表示为

$$\begin{cases} X_{li} = r_b \cdot \cos(x(1) + x(2) + d_{t,i}) + \\ r_b \cdot x(2) \cdot \sin(x(1) + x(2) + d_{t,i}) \\ Y_{li} = r_b \cdot \sin(x(1) + x(2) + d_{t,i}) - \\ r_b \cdot x(2) \cdot \cos(x(1) + x(2) + d_{t,i}) \\ Z_{li} = p \cdot x(3) + B_b \end{cases} \quad (7)$$

式中: $d_{t,i}=2 \cdot i \cdot \pi/Z+\omega-\pi/Z$ ;  $p=r/\tan \beta$ ,右旋取正,左旋取负。

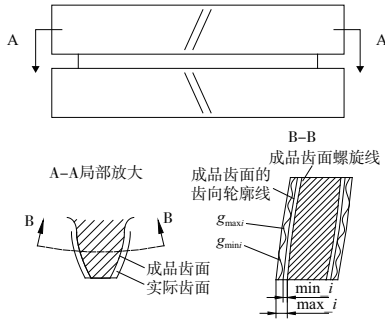


图4 包容齿面示意图

根据全齿扫面,令第*i*个齿槽右齿面最大、最小余量值分别为 $\sigma_{i,max}$ 、 $\sigma_{i,min}$ 。为了避免在模型调整过程中出现原始曲面与调整曲面交叉的情况,设定裕量值 $\delta$ ,再由最大、最小包容面的生成机理可知最大包容面方程 $L_{G,i,max}$ 为

$$\begin{cases} X_{2i}=r_b \cdot \cos(x(4)+x(5)+d_{t,i})+r_b \cdot \\ x(5) \cdot \sin(x(4)+x(5)+d_{t,i,max}) \\ Y_{2i}=r_b \cdot \sin(x(4)+x(5)+d_{t,i})-r_b \cdot \\ x(5) \cdot \cos(x(4)+x(5)+d_{t,i,max}) \\ Z_{2i}=p \cdot x(6)+B_b \end{cases} \quad (8)$$

最小包容面方程 $L_{G,i,min}$ 为

$$\begin{cases} X_{3i}=r_b \cdot \cos(x(7)+x(8)+d_{t,i})+r_b \cdot \\ x(8) \cdot \sin(x(7)+x(8)+d_{t,i,min}) \\ Y_{3i}=r_b \cdot \sin(x(7)+x(8)+d_{t,i})-r_b \cdot \\ x(8) \cdot \cos(x(7)+x(8)+d_{t,i,min}) \\ Z_{3i}=p \cdot x(9)+B_b \end{cases} \quad (9)$$

式中:

$$d_{t,i,max}=d_{t,i}+(\sigma_{i,max}+\delta)/(r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta) \quad (10)$$

$$d_{t,i,min}=d_{t,i}+(\sigma_{i,min}+\delta)/(r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta) \quad (11)$$

式(7)一式(11)中: $r_b$ 为基圆半径; $x(1)$ 、 $x(4)$ 、 $x(7)$ 为渐开线展角参数; $x(2)$ 、 $x(5)$ 、 $x(8)$ 为螺旋线角度参数; $x(3)$ 、 $x(6)$ 、 $x(9)$ 为升程参数; $r$ 为分度圆半径; $\alpha$ 为分度圆压力角; $\beta$ 为分度圆螺旋角; $Z$ 为总齿数; $i$ 为齿槽序列(0,1,2,...,Z-1); $\omega$ 为齿槽半角; $B_b$ 为螺旋面起始面距坐标系底面的距离。

### 1) 最小余量值计算模型

对单个齿面来讲,变换后齿面余量最小值可用变换后的最小包容齿面和成品齿面间的最小值。由于设置了裕量值 $\delta$ ,使得调整后的包容齿面始终位于成品齿面的同一侧(不交叉),因此,两齿面距离值的表达式可表示为 $\lambda_i=|T_3 T_2 T_1 \cdot L_{G,i,min}+T_4+T_5-L_{G,i}|-\delta$ ,即向量的模,第*i*个齿面的最小值记为 $\lambda_{i,min}$ 。在第*j*次寻优计算中,一侧齿面组中的齿面余量最小值记为 $d_{j,min}$ ,即 $d_{j,min}=\min(\lambda_{0,min}, \lambda_{1,min}, \dots, \lambda_{Z-1,min})$ 。工程应用中,在验证齿面渗碳层深满足设计要求的情况下取最大值所对应的调整方案,即 $\max(d_{0,min}, d_{1,min}, \dots)$ 所对应的调整方案。

### 2) 最大余量值计算模型

最大余量值计算模型和最小余量值计算模型有点相似,唯一不同的是在求解单齿面距离值时参变量的取值情

况不同。如图5所示,可以把齿面看成一个U、V面,在求解最小值时,U、V参变量在一定范围内可以任意取,而求解最大值时,U、V方向的参变量必须相同。这是因为,此时如果还是像求解最小值取时,最大值就处在两曲面对角点位置,这是不对的。其表达式为

$$\lambda_i=|T_3 T_2 T_1 \cdot L_{G,i,max}+T_4+T_5-L_{G,i}|-\delta$$

式中: $x(1)=x(7)$ ;  $x(2)=x(8)$ ;  $x(3)=x(9)$ 。

在第*j*次寻优计算中,一侧齿面组中的齿面余量最大值记为 $d_{j,max}$ ,即 $d_{j,max}=\max(\lambda_{0,max}, \lambda_{1,max}, \dots, \lambda_{Z-1,max})$ 。

在寻优得到 $\max(d_{0,max}, d_{1,max}, \dots)$ 对应的调整方案后,验证磨掉 $d_{j,max}$ 余量后,齿面渗碳层深还能满足设计研究,此次调整计算就算完成,否则剔除此处调整方案,继续按照1.2小节1)和2)所述方案进行寻优。

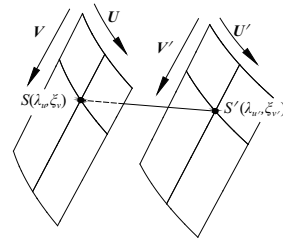


图5 最大值求解原理图

## 2 MATLAB 与模型对比验证

### 2.1 MATLAB 模型

图6为多次调整寻优的程序框图。在此,需要特别提出的是单齿面最小、最大余量求解方法。由于每个曲面控制变量为3个,用传统的多层for循环求解效率太低,为了提高求解效率,把此问题转化为有约束最小化求解的规划问题。其中,规划的目标函数就是1.2小节中1)的 $\lambda_i$ 。而在求解最大余量值时,则采用求1.2小节中2)的 $-\lambda_i$ 的最小值。

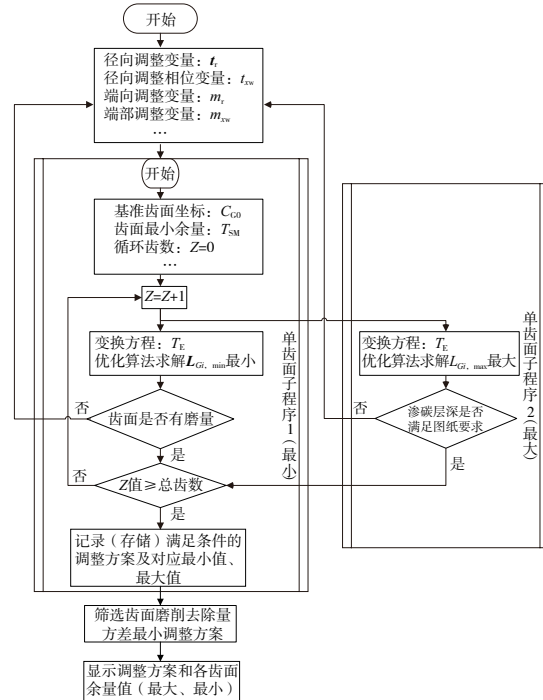


图6 单齿面程序框图

## 2.2 三维模型

图 6 程序用的是计算完所有调整对应齿面组中的每个齿面的最小值(最大值),然后索引符合要求的情况。其中,验证单次调整中各齿面余量(最小或最大)的正确性最为关键。为了达到验证的目的,首先用 UG 建立人字齿三维模型,其三维模型参数如表 1 所示。

表 1 UG 人字齿模型参数表

参数	数值	参数	数值
齿数	20	齿宽/mm	200
模数/mm	10	渐开线起始圆/mm	202.5
压力角/(°)	20	齿顶圆直径/mm	232
螺旋角/(°)	20	退刀槽宽度/mm	30
变位系数	0	支撑圆直径/mm	232

如图 7 所示,坐标系位于右旋齿右端面处,为了便于观察,取各齿面余量值均为 5.5 mm(其中含 5 mm 裕量阈值),取左旋左齿面为研究对象。

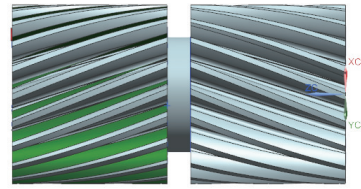


图 7 UG 人字齿三维图

### 1) 最小值余量比对

首先,令  $t_{gh} = 2$ (端面抬高幅值);  $x_{wj} = 0$ (端面抬高相位);  $x_{wj1} = 0.5 \cdot \pi$ (径向移动相位);  $t_r = 0.5$ (径向移动幅值)。

通过三维模型变换后计量曲面距离的变化,把三维模型计量的结果与 MATLAB 计算的结果进行比对,验证 MATLAB 模型的正确性。

为了便于观察,首先建立一个齿轮的三维模型,取每个齿面的余量都相等。

图 8、图 9 分别为在 0 相位端面抬高 2 mm、在 90°方向移动 0.5 mm 的三维齿面余量值和 MATLAB 计算值;第 0 齿槽、第 4 齿槽、第 12 齿槽误差值分别为 0.012 6 mm、-0.030 8 mm、0.058 1 mm。

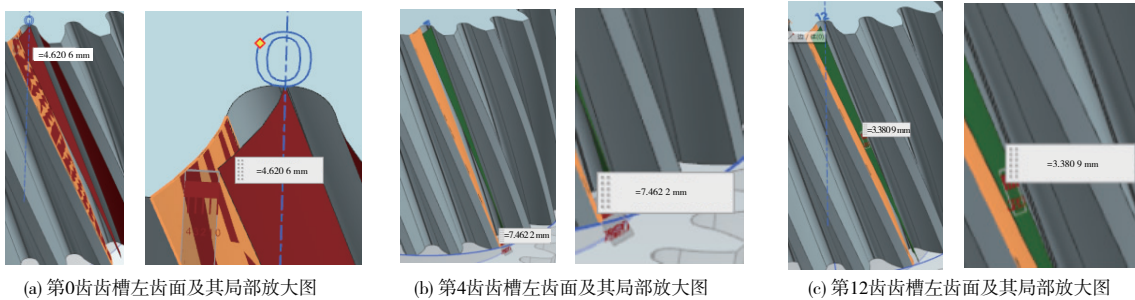


图 8 三维模型最小值

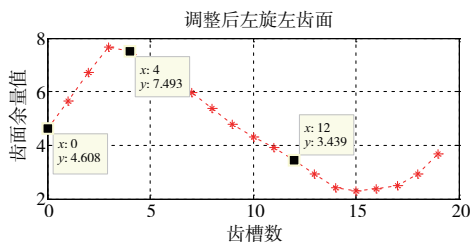


图 9 MATLAB 各齿面余量值

### 2) 最大值余量比对

令  $t_{gh} = 2$ (端面抬高幅值);  $x_{wj} = 0$ (端面抬高相位);  $x_{wj1} = 0.5 \cdot \pi$ (径向移动相位);  $t_r = 0.5$ (径向移动幅值)。

如图 10 和图 11 所示,第 0 齿槽、第 4 齿槽、第 12 齿槽左齿面误差值分别为 0.050 mm、0.005 mm、0.010 mm。

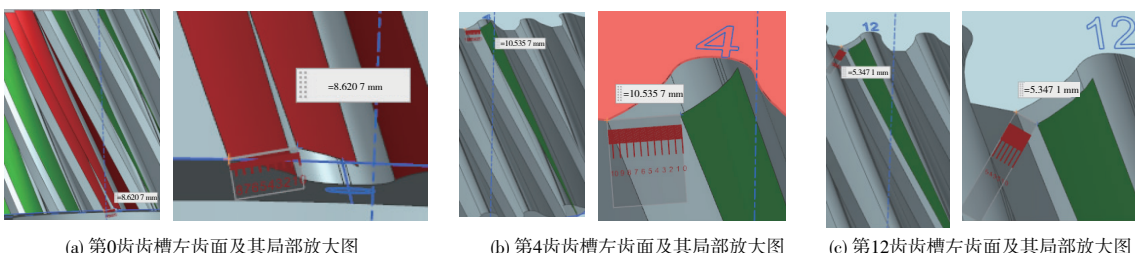


图 10 三维模型最大值



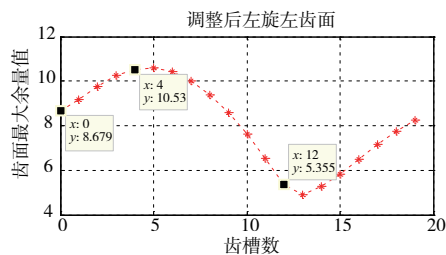


图 11 MATLAB 各齿面余量最大值

### 3 结语

从图 8—图 11 三维模型和 MATLAB 计算结果可以看出,无论是最大值误差还是最小值误差都是存在的。主要原因如下:1)在包容齿面方程推导过程中,最大、最小包容齿面余量是以分度圆处余量为基准来算的,用此表示齿面其余部位余量是存在原理误差的;2)在 MATLAB 齿面最大值和最小值求解计算中,都用到了 MATLAB 函数,此函数提供大型优化算法(内部映射牛顿法)和中型优化算法(二次规划法),不同优化算法之间也存在计算误差。但从对比结果可以看出,无论最大值还是最小值,误差值都控制在 0.06 mm 以内,而工程应用一般在 0.1 mm 级内进行调整,所以,这个误差可以接受的。

#### 参考文献:

- [1] KIM H Y, KIM S R, AHN J H, et al. Process monitoring of centerless grinding using acoustic emission [J]. Journal of Materials Processing Technology, 2001, 111(1/2/3): 273-278.

- [2] HUNDT W, LEUENBERGER D, REHSTEINER F, et al. An approach to monitoring of the grinding process using acoustic emission (AE) technique [J]. CIRP Annals, 1994, 43(1): 295-298.
- [3] KHUDBIN L V, GURYANIKHIN V F, YUGANOV V S. Use of low-frequency acoustic signal for real-time monitoring of grinding process [J]. Russian Engineering Research, 2019, 20(8): 83.
- [4] 刘海宁. 数控蜗杆砂轮磨齿机自动对刀技术研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2013.
- [5] 张国辉, 彭宁. AE(声发射)技术在成型砂轮磨齿机上的应用[J]. 机械工程师, 2011(10): 145-146.
- [6] 彭宁, 李春艳, 郭璐. 数控成形磨齿机测头自动对刀技术和余量分配的研究[J]. 机械工程师, 2015(1): 200-201.
- [7] 吴彬彬, 黄筱调, 方成刚, 等. 数控成形磨齿机在线测量系统标定误差的辨识及补偿[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2015(6): 74-77.
- [8] 张虎, 黄筱调, 方成刚, 等. 砂轮修整误差对数控成形磨齿加工精度的影响[J]. 南京工业大学学报(自然科学版), 2013, 35(4): 26-32.
- [9] 石照耀, 叶勇. 广义极坐标法测量渐开线轮廓误差的研究[J]. 仪器仪表学报, 2001, 22(2): 140-142, 153.
- [10] 刘俊辉, 狄成宝, 罗有朋. 基于 VERICUT 的偏心放置分段式齿圈铣齿方法研究[J]. 机械制造与自动化, 2022, 51(1): 161-163, 176.

收稿日期: 2022-04-20

#### (上接第 71 页)

计算得到  $P=99.5\%$ , 即优化后盲配互联尺寸基本可以保证产品合格率满足要求。

在开展研究之前, 内部 T/R 组件一次装配后所有通道测试全部正常的概率只有 75%, 测试正常组件经过试验后仍正常的概率只有 85%, 即一次装配无问题组件约为 64%。优化后方案成功保障了弹性连接器和内转接器的配合公差。优化之后内部 T/R 组件一次装配后所有通道测试全部正常概率为 100%, 且通过后期所有试验验证后仍 100% 测试正常。

### 3 结语

本文针对有源模块轴向盲配信号不通故障, 开展了详尽的轴向盲配公差分析。通过分析两条相互影响的盲配尺寸链, 发现结构尺寸链公差设计不合理, 公差累积导致垂直盲配互联问题, 并计算了盲配公差出现问题的概率。

结合实际情况, 针对该盲配互联问题, 开展优化设计。采用尽量缩短尺寸链、合理分配公差范围两种手段开展优化设计。成功优化后的方案, 弹性连接器装配尺寸 100% 在理想工作长度范围内, 内转接器的配合公差 99.5% 在目标配合公差范围内, 顺利通过所有试验验证。

#### 参考文献:

- [1] 王小陆, 王周海, 邹永庆. 片式有源阵列天线关键技术研究[J]. 微波学报, 2012, 28(增刊 2): 160-162.
- [2] 石海然, 江涛, 薛欣. 一种微小卫星片式有源相控阵天线的设计与实现[C]//2019 年全国微波毫米波会议论文集(上册). 广州: [s.n.], 2019: 79-82.
- [3] 康颖, 雷国忠, 崔敏, 等. 某瓦片式数字收发组件的多层互联结构设计[J]. 火控雷达技术, 2021, 50(3): 80-84.
- [4] 胡志敏, 黄美发, 钟艳如, 等. 基于尺寸链图形理论的公差计算方法[J]. 机械设计与制造, 2007(12): 106-108.
- [5] 何景熙. 复杂尺寸链分析计算理论及应用[D]. 重庆: 重庆大学, 2003.
- [6] 霍春景, 单红波, 赵一民, 等. 基于统计过程控制的变速箱尺寸链优化设计方法研究[J]. 机械传动, 2018, 42(7): 66-70, 76.
- [7] 王志, 王贵成. 传递系数法在判断增环和减环中的应用[C]. 全国机械设计教学研讨会议, 武夷山: [s.n.], 2007: 139-140.
- [8] 朱延娟, 祁磊. 复杂结构的公差分析及优化[J]. 机电一体化, 2015, 21(4): 39-44.
- [9] 阎艳, 余美琼, 王国新, 等. 平面尺寸链公差分析算法研究[J]. 北京理工大学学报, 2011, 31(7): 799-802.
- [10] 于风云. 尺寸链原理在零件精度设计中的应用[J]. 机械设计与制造, 2009(8): 86-87.

收稿日期: 2022-06-01