

# 数控系统中 S 型曲线加减速控制算法研究

刘远凯

(深圳众为兴技术股份有限公司, 广东 深圳 518052)

**摘要:**为了解决数控系统中 S 型加减速算法解析式方法缺乏的问题,提出一种 7 段式 S 型曲线加减速控制算法。该算法将所有 7 段式 S 型曲线可能出现的情况归纳为 11 个一元多次方程,再利用求根公式得到加减速时间。自主研发一种多轴运动控制卡,验证了 7 段式 S 型曲线加减速控制算法的所有情况。验证结果表明:该算法简单有效、运行稳定,能够满足高速高精度数控要求。

**关键词:**数控系统; S 型曲线; 加减速控制; 7 段式; 求根公式

**中图分类号:**TH123 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2023)06-0018-06

## Study on Acceleration and Deceleration Control Algorithm of S-shape Curve on NC System

LIU Yuankai

(ADTECH (Shenzhen) Technology Co., Ltd., Shenzhen 518052, China)

**Abstract:** For the lack of analytical method of acceleration and deceleration algorithm of S-shaped curve in NC system, this article proposes an acceleration and deceleration control algorithm of seven-segment S-shaped curve, which summarizes all the possible cases of the seven-segment S-shaped curve into 11 many times a dollar equation, and uses the root formula to obtain the acceleration and deceleration time. A multi-axis motion control card is independently studied and developed to verify all cases of the acceleration and deceleration control algorithm of seven-segment S-shape curve. The verification result shows that the algorithm is simple for application, stable in operation, which meets the requirements of high speed and high precision of numerical control system.

**Keywords:** NC system; S-shape curve; acceleration and deceleration control; seven-segment; root formula

## 0 引言

在数控运动控制系统中,加减速控制算法直接影响着运动控制系统的实时性、稳定性与加工精度等。可通过加减速控制算法对待加工轨迹段位移、速度、加速度和加加速度曲线进行合理规划,实现在启动、停止、加速和减速运动阶段对系统的柔性控制,避免系统产生失步、震动、超程等现象,保证系统高速平稳运行。

对于柔性加减速控制算法,国内外学者已经进行了探讨。郭新贵等<sup>[1]</sup>利用三角函数构建加减速曲线,减少了在进给过程中的柔性冲击问题;冷洪滨<sup>[2]</sup>建立了五次多项式的加减速控制模型,具有速度曲线、加速度曲线和加加速度曲线均连续的特性;李明等<sup>[3]</sup>利用切比雪夫多项式逼近正弦函数方法,构造了一种加加速连续的加减速算法。上述的算法研究与 S 型加减速曲线相比,具有更高阶的连续性,但速度规划的复杂程度却大大提升,有些甚至都不能实现。因此这些加减速算法在实际工程应用中并不多。

S 型加减速控制算法因其速度曲线和加速度曲线均具有连续性,成为当前数控系统中使用较多的一种速度控

制算法<sup>[4-6]</sup>。S 型加减速因其实用性,也受到了很多学者的关注,目前主要的研究热点在于其高效通用的求解模型。ALTINTAS<sup>[7]</sup>给出了 7 段式 S 型加减速模型,但未给出 S 型加减速过程中的求解方法;石川等<sup>[8]</sup>将 S 型加减速归纳成 8 种情况,采用解析式和二分迭代的方法对其进行求解;尹国梁<sup>[9]</sup>将 S 型加减速曲线 17 种不同类型的速度划分为 3 类,再利用二分法进行求解;朱明等<sup>[10]</sup>利用拉格朗日法构造二次方程来逼近无理方程求解,但精度却无法保证;杨亮亮等<sup>[11]</sup>将 S 型加减速中的五元非线性方程转化成二元非线性方程组和一元线性方程组,再用牛顿迭代法和迭代修正的方式求解。由于 S 型加减速算法的表达式是分段表达式,上述研究都不能将方程式转化为一个类似于二次方程求根的公式,只能采用二分迭代法、牛顿迭代法以及拟合法等数值解析的方法求解。

综上所述,一种 7 段式 S 型加减速控制算法的解析式方法是目前国内数控系统所缺乏的。本文提出了一种 7 段式 S 型曲线加减速控制算法及其解析式的求解方法,研究基于给定的轨迹长度与临界长度对比进行分类的方式,将其转换成一元二次方程、一元三次方程或一元四次方程来求解各段运行时间,最后在自主开发的多轴运动控制器上进行验证。

**基金项目:**国家工信部 2020 年工业互联网创新发展工程项目(TC200H01Q);深圳市科技研发资金项目(JSJG20200701095003006)

**作者简介:**刘远凯(1992—),男,湖北武汉人,工程师,硕士,研究方向为数控技术、运动控制技术、机器人技术,liuyk1@qq.com。

## 1 7 段式 S 型曲线加减速控制模型

S 型曲线加减速的名称由系统在加减速控制阶段的速度曲线形状呈现出 S 型而得来。如图 1 所示,正常情况下 S 曲线加减速的运行过程可分为 7 段:加加速段、匀加速段、减加速段、匀速段、加减速段、匀减速段、减减速段。

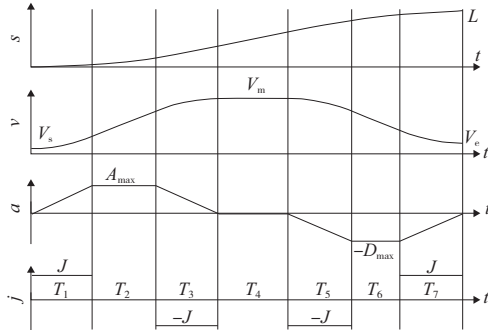


图 1 7 段 S 型加减速示意图

图 1 中:  $T_1$  表示加加速段的运行时间;  $T_2$  表示匀加速段的运行时间;  $T_3$  表示减加速段的运行时间;  $T_4$  表示匀速段的运行时间;  $T_5$  表示加减速段的运行时间;  $T_6$  表示匀减速段的运行时间;  $T_7$  表示减减速段的运行时间;  $j$  表示加加速度曲线;  $a$  表示加速度曲线,  $v$  表示速度曲线,  $s$  表示位移曲线;  $V_s$  表示初速度;  $V_e$  表示末速度;  $V_m$  表示最大驱动速度;  $L$  表示实际路径长度。

设电机加速度曲线从 0 达到最大值和从最大值到 0 所用的时间相等, 此时间定为系统的一个特性时间常数  $t_m$ , 图 1 中,  $A_{\max} = D_{\max}$ 。

在目标运动过程中,  $A$  表示最大加速度;  $J$  表示最大加加速度。当加速度能够达到最大值时,  $T_1 = T_3 = T_5 = T_7 = A/J = t_m$ ; 当加速度无法达到最大值时,  $T_1 = T_3, T_5 = T_7$ 。

7 段式 S 型加减速控制模型中加加速度  $j(t)$  的计算公式为

$$j(t) = \begin{cases} J & 0 \leq t < t_1 \\ 0 & t_1 \leq t < t_2 \\ -J & t_2 \leq t < t_3 \\ 0 & t_3 \leq t < t_4 \\ -J & t_4 \leq t < t_5 \\ 0 & t_5 \leq t < t_6 \\ J & t_6 \leq t \leq t_7 \end{cases} \quad (1)$$

加速度  $a(t)$  的计算公式为

$$a(t) = \begin{cases} J\tau_1 & 0 \leq t < t_1 \\ JT_1 & t_1 \leq t < t_2 \\ JT_1 - J\tau_3 & t_2 \leq t < t_3 \\ 0 & t_3 \leq t < t_4 \\ -J\tau_5 & t_4 \leq t < t_5 \\ -JT_5 & t_5 \leq t < t_6 \\ -JT_5 + J\tau_7 & t_6 \leq t \leq t_7 \end{cases} \quad (2)$$

速度  $v(t)$  的计算公式为

$$v(t) = \begin{cases} V_s + J\tau_1^2/2 & 0 \leq t < t_1, \text{ 当 } t=t_1 \text{ 时, } v_{01} = V_s + J\tau_1^2/2 \\ v_{01} + JT_1\tau_2 & t_1 \leq t < t_2, \text{ 当 } t=t_2 \text{ 时, } v_{02} = v_{01} + JT_1\tau_2 \\ v_{02} + JT_1\tau_3 - J\tau_3^2/2 & t_2 \leq t < t_3, \text{ 当 } t=t_3 \text{ 时, } v_{03} = v_{02} + JT_1^2/2 \\ v_{03} & t_3 \leq t < t_4, \text{ 当 } t=t_4 \text{ 时, } v_{04} = v_{03} \\ v_{04} - J\tau_5^2/2 & t_4 \leq t < t_5, \text{ 当 } t=t_5 \text{ 时, } v_{05} = v_{04} - J\tau_5^2/2 \\ v_{05} - JT_5\tau_6 & t_5 \leq t < t_6, \text{ 当 } t=t_6 \text{ 时, } v_{06} = v_{05} - JT_5\tau_6 \\ v_{06} - JT_5\tau_7 + J\tau_7^2/2 & t_6 \leq t \leq t_7, \text{ 当 } t=t_7 \text{ 时, } v_{07} = v_{06} - JT_5^2/2 \end{cases} \quad (3)$$

位移  $s(t)$  的计算公式为

$$s(t) = \begin{cases} v_s\tau_1 + J\tau_1^3/6 & 0 \leq t < t_1 \\ s_{01} + v_{01}\tau_2 + JT_1\tau_2^2/2 & t_1 \leq t < t_2 \\ s_{02} + v_{02}\tau_3 + JT_1\tau_3^2/2 - J\tau_3^3/6 & t_2 \leq t < t_3 \\ s_{03} + v_{03}\tau_4 & t_3 \leq t < t_4 \\ s_{04} + v_{04}\tau_5 - J\tau_5^3/6 & t_4 \leq t < t_5 \\ s_{05} + v_{05}\tau_6 - JT_5\tau_6^2/2 & t_5 \leq t < t_6 \\ s_{06} + v_{06}\tau_7 - JT_5\tau_7^2/2 + J\tau_7^3/6 & t_6 \leq t \leq t_7 \end{cases} \quad (4)$$

式中: 令  $k=1, 2, \dots, 7$ ;  $t_k$  表示各个阶段的过渡时刻;  $\tau_k$  表示局部时间坐标, 即以各个阶段的起始点作为零点的时刻;  $T_k$  表示各个阶段的持续运行时间。

当  $t=t_1$  时,  $s_{01} = V_s T_1 + J\tau_1^3/6$ ; 当  $t=t_2$  时,  $s_{02} = s_{01} + v_{01} T_2 + JT_1 \tau_2^2/2$ ; 当  $t=t_3$  时,  $s_{03} = s_{02} + v_{02} T_3 + JT_1 \tau_3^2/2 - J\tau_3^3/6$ ; 当  $t=t_4$  时,  $s_{04} = s_{03} + v_{03} T_4$ ; 当  $t=t_5$  时,  $s_{05} = s_{04} + v_{04} T_5 - J\tau_5^3/6$ ; 当  $t=t_6$  时,  $s_{06} = s_{05} + v_{05} T_6 - JT_5 \tau_6^2/2$ ; 当  $t=t_7$  时,  $s_{07} = s_{06} + v_{06} T_7 - JT_5 \tau_7^2/2 + J\tau_7^3/6$ 。

匀速段的运行时间  $T_4$  的计算公式为

$$T_4 = \left[ L - V_s(2T_1 + T_2) - \frac{1}{2}JT_1(2T_1^2 + 3T_1T_2 + T_2^2) - v_{03}(2T_5 + T_6) + \frac{1}{2}JT_5(2T_5^2 + 3T_5T_6 + T_6^2) \right] / V_m \quad (5)$$

加速区具体包括加加速段、匀加速段、减加速段, 加速区的路径长度  $S_a$  的计算公式为

$$S_a = s_{03} = V_s(2T_1 + T_2) + JT_1(2T_1^2 + 3T_1T_2 + T_2^2)/2 \quad (6)$$

减速区具体包括加减速段、匀减速段、减减速段, 减速区的路径长度  $S_d$  的计算公式为

$$S_d = s_{07} - s_{04} = v_{03}(2T_5 + T_6) - JT_5(2T_5^2 + 3T_5T_6 + T_6^2)/2 \quad (7)$$

则加速区的路径长度与减速区的路径长度的总和  $S_{\text{all}}$  的计算公式为

$$S_{\text{all}} = S_a + S_d \quad (8)$$

当初速度可达末速度时, 则加/减速段长度也可表示为<sup>[9]</sup>

$$L_a(V_s, V_e) = L_d(V_e, V_s) = \begin{cases} (V_s + V_e) \sqrt{\frac{|V_e - V_s|}{J}} & |V_e - V_s| \leq \frac{A^2}{J} \\ \frac{1}{2}(V_s + V_e) \left( \frac{A}{J} + \frac{|V_e - V_s|}{A} \right) & |V_e - V_s| > \frac{A^2}{J} \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $L_a(V_s, V_e)$  表示从初速度  $V_s$  加速度到末速度  $V_e$  的路径长度;  $L_d(V_e, V_s)$  表示从末速度  $V_e$  减速到初速度  $V_s$  的路径长度。

## 2 S 型曲线加减速具体控制算法

### 2.1 计算临界长度

典型的 S 型加减速控制算法由 7 段组成,但由于初速度、末速度、实际路径长度等限制,并不能保证每次速度规划都存在完整的 7 段。可以将所有的速度规划类型分为 3 大类:仅存在加(减)速度类型、有匀加速段类型和无匀加速段类型。由式(10)可求得第一临界长度

$$L_1 = L_a(V_s, V_e) = L_d(V_e, V_s) \quad (10)$$

第二临界长度

$$L_2 = L_a(V_s, V_m) + L_d(V_m, V_e) \quad (11)$$

式中: $L_a(V_s, V_m)$ 表示从初速度  $V_s$  加速至最大驱动速度  $V_m$  时的路径长度; $L_d(V_m, V_e)$ 表示从最大驱动速度  $V_m$  减速至末速度  $V_e$  时的路径长度。

若实际路径  $L \leq L_1$  时,仅存在加(减)速度类型,则说明从初速度  $V_s$  不能加(减)速到达末速度  $V_e$ ;若实际路径  $L \geq L_2$  时,有匀加速段类型,则说明从初速度  $V_s$  可加速到最大速度  $V_m$ ,再从最大速度  $V_m$  减速到末速度  $V_e$ ;若  $L_1 < L < L_2$  时,无匀加速段类型,则说明从初速度  $V_s$  可加速到一个新的最大速度  $V'_m$ ,再从新的最大速度  $V'_m$  减速到末速度  $V_e$ ,其中  $\max(V_s, V_e) < V'_m < V_m$ 。

### 2.2 仅存在加(减)速度类型

当实际路径  $L \leq L_1$  仅存在加(减)速时,判断是否存在匀加速段或匀减速段可分为 4 种情况讨论。其中: $S_{13}$ 为当  $T_1 = T_3 = A/J, T_2 = 0, T_4 = T_5 = T_6 = T_7 = 0$  时运动过程的路径长度; $S_{57}$ 为当  $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0, T_5 = T_7 = A/J, T_6 = 0$  时运动过程的路径长度。

1) 当  $L \leq L_1$  且  $V_s \leq V_e$ ,若  $(V_e - V_s) > (A^2/J)$  且  $L > S_{13}$  时该段规划从初速度  $V_s$  加速到末速度  $V_e$  可达到最大加速度,即存在匀加速段,则可确定目标运动过程仅包括匀加速段、匀加速段、匀加速段,并得到  $T_1 = T_3 = A/J = T_m, T_4 = T_5 = T_6 = T_7 = 0$ 。

根据目标运动过程和式(6)得到第一方程

$$\frac{J \cdot T_1}{2} T_2^2 + \left( V_s + \frac{3J \cdot T_1^2}{2} \right) T_2 + (2V_s \cdot T_1 + J \cdot T_1^3 - L) = 0 \quad (12)$$

最后,利用一元二次方程的求根公式求解第一方程,舍去  $T_2$  的非可行解即可。

2) 当  $L \leq L_1$  且  $V_s \leq V_e$ ,若  $(V_e - V_s) \leq (A^2/J)$  或  $L \leq S_{13}$  时该段规划从初速度  $V_s$  加速到末速度  $V_e$  不能达到最大加速度,即不存在匀加速段,则可确定目标运动过程仅包括匀加速段、匀加速段,并得到  $T_2 = T_4 = T_5 = T_6 = T_7 = 0$ 。

根据目标运动过程和式(6)得到第二方程

$$JT_1^3 + 2V_s \cdot T_1 - L = 0 \quad (13)$$

最后,利用一元三次方程的盛金公式求解第二方程,舍去  $T_1$  的非可行解即可。

3) 当  $L \leq L_1$  且  $V_s > V_e$ ,若  $(V_s - V_e) > (A^2/J)$  且  $L > S_{57}$  时该段规划从初速度  $V_s$  减速到末速度  $V_e$  能达到最大加速度,即存在匀减速段,则可确定目标运动过程仅包括

匀加速段、匀加速段、匀加速段,并得到  $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0, T_5 = T_7 = A/J = T_m$ 。

根据目标运动过程和式(7)得到第三方程

$$-\frac{J \cdot T_5}{2} T_6^2 + \left( V_s - \frac{3J \cdot T_5^2}{2} \right) T_6 + (2V_s \cdot T_5 - J \cdot T_5^3 - L) = 0 \quad (14)$$

最后,利用一元二次方程的求根公式求解第三方程,舍去  $T_5$  的非可行解即可。

4) 当  $L \leq L_1$  且  $V_s > V_e$ ,若  $(V_s - V_e) \leq (A^2/J)$  或  $L \leq S_{57}$  时该段规划从初速度  $V_s$  减速到末速度  $V_e$  不能达到最大加速度,即不存在匀减速段,则可确定目标运动过程仅包括匀加速段、匀加速段,并得到  $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_6 = 0$ 。

根据目标运动过程和式(7)得到第四方程

$$-JT_5^3 + 2V_s \cdot T_5 - L = 0 \quad (15)$$

最后,利用一元三次方程的盛金公式求解第四方程,舍去  $T_5$  的非可行解即可。

### 2.3 有匀加速段类型

当实际路径  $L \geq L_2$  有匀加速段时,可根据加速段和减速段是否能达到最大加速度来分为 4 种情况进行讨论。

1) 当  $L \geq L_2$ ,若  $(V_m - V_s) > (A^2/J)$  且  $(V_m - V_e) > (A^2/J)$  时该段规划的加速段和减速段都可达到最大加速度,可确定目标运动过程包括匀加速段、匀加速段、匀加速段、匀加速段、匀加速段、匀加速段、匀加速段,根据目标运动过程得到第五方程

$$\begin{cases} T_4 = [L - L_a(V_s, V_m) - L_d(V_m, V_e)] / V_m \\ T_1 = T_3 = A/J, T_2 = (V_m - V_s) / A - A/J \\ T_5 = T_7 = A/J, T_6 = (V_m - V_e) / A - A/J \end{cases} \quad (16)$$

2) 当  $L \geq L_2$ ,若  $(V_m - V_s) \leq (A^2/J)$  且  $(V_m - V_e) \leq (A^2/J)$  时该段规划的加速段和减速段都不能达到最大加速度,则可确定目标运动过程仅包括匀加速段、匀加速段、匀加速段、匀加速段、匀加速段,根据目标运动过程得到第六方程

$$\begin{cases} T_4 = [L - L_a(V_s, V_m) - L_d(V_m, V_e)] / V_m \\ T_1 = T_3 = \sqrt{(V_m - V_s) / J}, T_2 = 0 \\ T_5 = T_7 = \sqrt{(V_m - V_e) / J}, T_6 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

3) 当  $L \geq L_2$ ,若  $(V_m - V_s) \leq (A^2/J)$  且  $(V_m - V_e) > (A^2/J)$  时该段规划的加速段不能达到最大加速度,减速段能达到最大加速度,则可确定目标运动过程仅包括匀加速段、匀加速段、匀加速段、匀加速段、匀加速段,根据目标运动过程得到第七方程

$$\begin{cases} T_4 = [L - L_a(V_s, V_m) - L_d(V_m, V_e)] / V_m \\ T_1 = T_3 = \sqrt{(V_m - V_s) / J}, T_2 = 0 \\ T_5 = T_7 = A/J, T_6 = (V_m - V_e) / A - A/J \end{cases} \quad (18)$$

4) 当  $L \geq L_2$ ,若  $(V_m - V_s) > (A^2/J)$  且  $(V_m - V_e) \leq (A^2/J)$  时该段规划的加速段能达到最大加速度,减速段不能达到最大加速度,则可确定目标运动过程仅包括匀加速段、匀加速段、匀加速段、匀加速段、匀加速段,根据目标运动过程得到第八方程

$$\begin{cases} T_4 = [L - L_a(V_s, V_m) - L_d(V_m, V_e)] / V_m \\ T_1 = T_3 = A/J, T_2 = (V_m - V_s) / A - A/J \\ T_5 = T_7 = \sqrt{(V_m - V_e) / J}, T_6 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

## 2.4 无匀变速段类型

当  $L_1 < L < L_2$  时,说明从初速度  $V_s$  可达末速度  $V_e$ ,此时的 S 型加减速可看成是一个可逆形式,即从初速度  $V_s$  先加速到一个新的最大速度  $V'_m$  再减速到末速度  $V_e$  的位移等于末速度  $V_e$  先加速一个最大的速度  $V'_m$  再减速到初速度  $V_s$  的位移,因此只需讨论  $V_s \leq V_e$  的 8 种情况。

1) 当  $L_1 < L < L_2$  且  $V_s \leq V_e$  且  $(V_e - V_s) > (A^2/J)$ ,若  $L > S_{12357}$  ( $S_{12357}$  表示当  $T_1 = T_3 = T_5 = T_7 = A/J = t_m, T_4 = T_6 = 0, T_2 = (V_e - V_s)/A$  时运动过程的路径长度)且  $(V_m - V_e) > (A^2/J)$  时

该段规划从初速度  $V_s$  加速到末速度  $V_e$  存在匀加速段,并且实际路径  $L > S_{12357}$  以及  $(V_m - V_e) > (A^2/J)$ ,说明从新的最大驱动速度  $V'_m$  减速到末速度  $V_e$  可达最大加速度,即存在匀减速段,则可确定目标运动过程仅包括加加速段、匀加速段、减加速段、加减速段、匀减速段、减减速段,可得到

$$T_2 = (V_e - V_s)/A + T_6, T_1 = T_3 = T_5 = T_7 = A/J = t_m \quad (20)$$

根据目标运动过程和式(8)得到第九方程

$$A \cdot T_6^2 + (2V_e + 3A \cdot t_m) \cdot T_6 + 2t_m \cdot (V_e + V_s + A \cdot t_m) + \frac{V_s \cdot (V_e - V_s)}{A} + \frac{3t_m \cdot (V_e - V_s)}{2} + \frac{(V_e - V_s)^2}{2A} - L = 0 \quad (21)$$

最后,利用一元二次方程的求根公式求解第九方程,舍去  $T_6$  的非可行解即可。

2) 当  $L_1 < L < L_2$  且  $V_s \leq V_e$  且  $(V_e - V_s) > (A^2/J)$ ,若  $L \leq S_{12357}$  或  $(V_m - V_e) \leq (A^2/J)$  时

该段规划从初速度  $V_s$  加速到末速度  $V_e$  存在匀加速段,并且实际路径  $L \leq S_{12357}$  或者  $(V_m - V_e) \leq (A^2/J)$ ,说明从新的最大驱动速度  $V'_m$  减速到末速度  $V_e$  不能达到最大加速度,即不存在匀减速段,则可确定目标运动过程仅包括加加速段、匀加速段、减加速段、加减速段、减减速段,则可得到

$$\begin{cases} T_1 = T_3 = A/J = t_m, T_6 = 0, T_7 = T_5 \\ T_2 = (V_e + J \cdot T_5^2 - V_s)/A - t_m \end{cases} \quad (22)$$

根据目标运动过程和式(8)得到第十方程

$$\frac{J^2}{2A} T_5^4 + J T_5^3 + \left( \frac{A}{2} + \frac{V_e \cdot J}{A} \right) T_5^2 + 2V_e \cdot T_5 + t_m \cdot V_s + \frac{V_s \cdot (V_e - V_s)}{A} + J \cdot t_m^3 + \frac{J \cdot t_m}{2} \cdot \left[ t_m - \frac{(V_e - V_s)}{A} \right]^2 - \frac{3}{2} J t_m^2 \left( t_m - \frac{V_e - V_s}{A} \right) - L = 0 \quad (23)$$

最后,利用费拉里法求解关于  $T_5$  的一元四次方程,舍去  $T_5$  的非可行解即可。

3) 当  $L_1 < L < L_2$  且  $V_s \leq V_e$  且  $(V_e - V_s) < (A^2/J)$ ,若  $(V_m - V_s) \leq (A^2/J)$  时

该段规划从初速度  $V_s$  加速到新的最大驱动速度  $V'_m$ ,再减速到末速度  $V_e$  都不能达到最大加速度,即不存在匀加速段和匀减速段,则可确定目标运动过程仅包括加加速段、减加速段、加减速段、减减速段,可得到  $T_1 = T_3, T_5 = T_7, T_2 = T_4 = T_6$ 。

根据速度曲线公式和式(6)得到

$$V_s + J \cdot T_1^2 = V_e + J \cdot T_5^2 \quad (24)$$

$$2V_s \cdot T_1 + J \cdot T_1^3 + 2V_e \cdot T_5 + J \cdot T_5^3 = L \quad (25)$$

根据式(24),可得:

$$\begin{cases} V_s = V_e - J(T_1^2 - T_5^2) \\ V_e = V_s + J \cdot (T_1^2 - T_5^2) \end{cases} \quad (26)$$

将式(26)代入式(25)中,可得

$$V_s \cdot T_1 + [V_e - J(T_1^2 - T_5^2)] \cdot T_1 + V_e \cdot T_5 + [V_s + J \cdot (T_1^2 - T_5^2)] \cdot T_5 + J \cdot T_1^3 + J \cdot T_5^3 = (V_s + V_e) \cdot (T_1 + T_5) + J \cdot T_1 \cdot T_5 \cdot (T_1 + T_5) = L \quad (27)$$

令

$$\begin{cases} (T_1 + T_5) = m \\ (T_1 - T_5) = n \end{cases} \quad (28)$$

由式(28)及式(24)可得

$$\begin{cases} n = \frac{V_e - V_s}{J \cdot m} \\ T_1 \cdot T_5 = \frac{m^2 - n^2}{4} \end{cases} \quad (29)$$

将式(29)代入式(27)可得第十一方程

$$\frac{J}{4} \cdot m^4 + (V_s + V_e) \cdot m^2 - L \cdot m - \frac{(V_s - V_e)^2}{4J} = 0 \quad (30)$$

然后,利用费拉里法求解关于  $m$  的一元四次方程得到可行解,最后,根据式(28)和式(26)即可求解  $T_1, T_5$ 。

4) 当  $L_1 < L < L_2$  且  $V_s \leq V_e$  且  $(V_e - V_s) < (A^2/J)$  且  $(V_m - V_s) > (A^2/J)$ ,若  $(V_m - V_e) > (A^2/J)$  且  $L \leq S_{1357}$  ( $S_{1357}$  表示当  $T_1 = T_3 = A/J = t_m, T_2 = T_4 = T_6 = 0, T_5 = T_7 = \sqrt{(V_s + A \cdot t_m - V_e)/J}$  时运动过程的路径长度)时

该段规划可确定目标运动过程仅包括加加速段、减加速段、加减速段、减减速段,根据目标运动过程利用第十一方程求解即可。

5) 当  $L_1 < L < L_2$  且  $V_s \leq V_e$  且  $(V_e - V_s) < (A^2/J)$  且  $(V_m - V_s) > (A^2/J)$ ,若  $(V_m - V_e) > (A^2/J)$  且  $S_{1357} < L \leq S_{12357}$  时

该段规划可确定目标运动过程仅包括加加速段、匀加速段、减加速段、加减速段、减减速段,根据目标运动过程利用第十方程求解即可。

6) 当  $L_1 < L < L_2$  且  $V_s \leq V_e$  且  $(V_e - V_s) < (A^2/J)$  且  $(V_m - V_s) > (A^2/J)$ ,若  $(V_m - V_e) > (A^2/J)$  且  $L > S_{12357}$  时

该段规划可确定目标运动过程仅包括加加速段、匀加速段、减加速段、加减速段、匀减速段、减减速段,根据目标运动过程利用第九方程求解即可。

7) 当  $L_1 < L < L_2$  且  $V_s \leq V_e$  且  $(V_e - V_s) < (A^2/J)$  且  $(V_m - V_s) > (A^2/J)$ ,若  $(V_m - V_e) \leq (A^2/J)$  且  $L \leq S_{1357}$  时

该段规划可确定目标运动过程仅包括加加速段、减加速段、加减速段、减减速段,根据目标运动过程利用第十一方程求解即可。

8) 当  $L_1 < L < L_2$  且  $V_s \leq V_e$  且  $(V_e - V_s) < (A^2/J)$  且  $(V_m - V_s) > (A^2/J)$ ,若  $(V_m - V_e) \leq (A^2/J)$  且  $L > S_{1357}$  时

该段规划可确定目标运动过程仅包括加加速段、匀加速段、减加速段、加减速段、减减速段,根据目标运动过程利用第十方程求解即可。

## 3 S 型曲线加减速控制算法实验验证

基于三轴正交的数控系统实验平台如图 2 所示。主

要包括 PC 机、ADT8989H1 高性能运动控制卡、步进电机以及正交工作台。图 2 中,ADT8989H1 高性能运动控制卡处理器选用某公司 XC7Z010-1CLG400I4334,用于计算各坐标轴所需信息。所研究的 7 段式 S 型曲线加减速控制算法均在该处理器中实现,可用于多轴运动控制。将上述总共 24 种参数不同的情况通过 PC 机下发到 ADT8989H1 高性能运动控制卡,经过 S 型加减速控制处理,采集并分析 ADT8989H1 高性能运动控制卡实际输出的位移、最大速度和最大加速度以验证提出的 S 型曲线加减速控制算法的有效性。

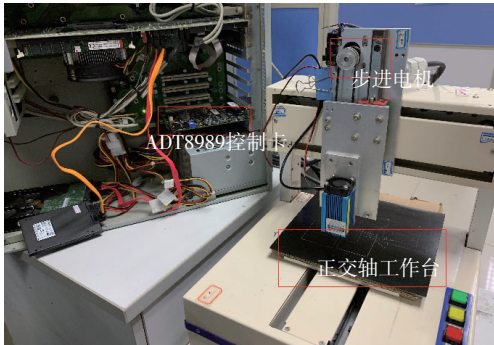


图 2 三轴正交的数控系统测试平台

### 3.1 S 型曲线加减速控制算法实现

S 型加减速控制算法实现流程图如图 3 所示。

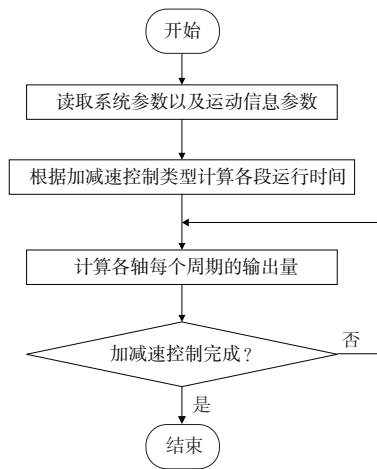


图 3 S 型加减速控制算法实现流程

S 型加减速控制算法实现要有 3 个步骤:1) 读取 S 型曲线加减速控制所需要的运动信息;2) 根据加减速类型判断,计算 S 型曲线加减速 7 段所对应的时间;3) 根据 S 型曲线加减速 7 段对应时间以及系统参数,实时计算各轴每个周期的输出量,直至整段轨迹加减速控制完成。

### 3.2 实验验证与分析

设置系统参数:插补周期 1 ms,24 种不同参数的运动轨迹参数如表 1 所示,对每组轨迹分别进行 S 型曲线加减速控制。

表 1 24 种不同参数的 S 型运动轨迹

参数组别	起点速度/ (mm/s)	终点速度/ (mm/s)	最大驱动速度/ (mm/s)	最大加速度/ (mm/s <sup>2</sup> )	最大加加速度/ (mm/s <sup>3</sup> )	路径长度/ mm
1	2.0	50.0	100.0	400.0	5 000.0	3.0
2	2.0	50.0	100.0	400.0	5 000.0	2.0
3	50.0	2.0	100.0	200.0	2 000.0	8.1
4	50.0	2.0	100.0	200.0	2 000.0	6.0
5	2.0	5.0	100.0	200.0	2 000.0	70.0
6	2.0	5.0	10.0	200.0	2 000.0	70.0
7	15.0	2.0	30.0	200.0	2 000.0	70.0
8	2.0	15.0	30.0	200.0	2 000.0	70.0
9	2.0	30.0	100.0	200.0	2 000.0	58.0
10	2.0	30.0	100.0	200.0	2 000.0	10.0
11	2.0	10.0	15.0	200.0	2 000.0	2.0
12	10.0	20.0	40.0	200.0	2 000.0	7.0
13	10.0	20.0	50.0	200.0	2 000.0	10.0
14	10.0	20.0	50.0	200.0	2 000.0	15.0
15	25.0	40.0	50.0	200.0	2 000.0	10.0
16	25.0	40.0	50.0	200.0	2 000.0	12.0
17	30.0	2.0	100.0	200.0	2 000.0	58.0
18	30.0	2.0	100.0	200.0	2 000.0	10.0
19	10.0	2.0	15.0	200.0	2 000.0	2.0
20	20.0	10.0	40.0	200.0	2 000.0	7.0
21	20.0	10.0	50.0	200.0	2 000.0	10.0
22	20.0	10.0	50.0	200.0	2 000.0	15.0
23	40.0	25.0	50.0	200.0	2 000.0	10.0
24	40.0	25.0	50.0	200.0	2 000.0	12.0

表 2 为采用 24 种不同参数的 S 型曲线加减速控制后实际输出的位移、最大速度和最大加速度统计结果。由表 2 可知,所提出的 S 型加减速控制算法能正确规划出不同轨迹参数下的速度变化曲线,在加速阶段、匀速阶段以及减速阶段,达到的实际最大速度和最大加速度均小于设定的最大驱动速度和最大加速度,说明所提出的 S 型曲线加减速算法可保证最大速度及最大加速度不超限。由表 2 可知,24 组实际输出的位移与对应给定的位移误差最大值为第 15 组和 23 组的  $1.3 \times 10^{-14}$  mm,说明计算输出的实际轨迹长度与给定轨迹长度相等。

表 2 24 种不同参数的 S 型曲线实际输出参数

参数组别	位移/ mm	位移误差/ mm	最大速度/ (mm/s)	加速段最大加速度/ (mm/s <sup>2</sup> )	减速段最大加速度/ (mm/s <sup>2</sup> )
1	3.0	$4.4 \times 10^{-16}$	45.887	400.000	—
2	2.0	$-4.4 \times 10^{-16}$	26.545	350.322	—
3	8.1	$-1.8 \times 10^{-15}$	50.000	—	200.000

续表2

参数组别	位移/mm	位移误差/mm	最大速度/(mm/s)	加速段最大加速度/(mm/s <sup>2</sup> )	减速段最大加速度/(mm/s <sup>2</sup> )
4	6.0	8.9×10 <sup>-16</sup>	50.000	—	131.324
5	70.0	0.0	100.000	200.000	200.000
6	70.0	0.0	10.000	126.491	100.000
7	70.0	0.0	30.000	173.205	200.000
8	70.0	0.0	30.000	200.000	173.205
9	58.0	7.1×10 <sup>-15</sup>	98.775	200.000	200.000
10	10.0	0.0	38.174	200.000	127.857
11	2.0	-3.1×10 <sup>-15</sup>	12.990	148.255	77.327
12	7.0	-4.4×10 <sup>-15</sup>	28.803	193.921	132.685
13	10.0	1.8×10 <sup>-15</sup>	35.370	200.000	175.328
14	15.0	3.6×10 <sup>-15</sup>	45.227	200.000	200.000
15	10.0	-1.3×10 <sup>-14</sup>	43.401	191.837	82.472
16	12.0	3.6×10 <sup>-15</sup>	46.167	200.000	109.696
17	58.0	7.1×10 <sup>-15</sup>	98.775	200.000	200.000
18	10.0	0.0	38.174	127.857	200.000
19	2.0	-3.1×10 <sup>-15</sup>	12.990	77.327	148.255
20	7.0	-4.4×10 <sup>-15</sup>	28.803	132.685	193.921
21	10.0	1.8×10 <sup>-15</sup>	35.370	175.328	200.000
22	15.0	3.6×10 <sup>-15</sup>	45.227	200.000	200.000
23	10.0	-1.3×10 <sup>-14</sup>	43.401	82.472	191.837
24	12.0	3.6×10 <sup>-15</sup>	46.167	109.696	200.000

注：“—”表示无数据。

### 3.3 加工实例

在所搭建的基于三轴正交的数控系统实验平台上,进行单段圆弧加工实验验证。设置系统参数:插补周期为 1 ms,各轴最大速度为 300 mm/s,各轴最大加速度为 800 mm/s<sup>2</sup>;设置运动轨迹参数:插补起点速度和终点速度为 0 mm/s,最大插补驱动速度为 200 mm/s,最大插补加速度为 500 mm/s<sup>2</sup>,最大插补加加速度为 2 000 mm/s<sup>3</sup>,圆弧轨迹起点终点均为坐标原点,圆弧半径为 60 mm。圆弧加工输出的位移合成轨迹、两轴位移轨迹、速度、加速度分别如图 4—图 7 所示。

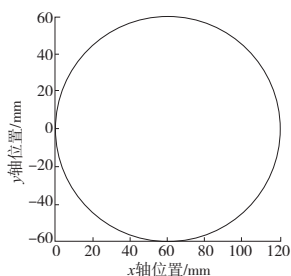


图 4 两轴位移曲线合成轨迹

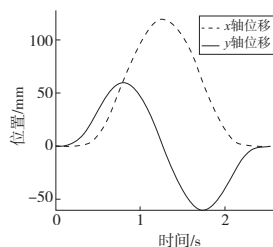


图 5 两轴位移曲线

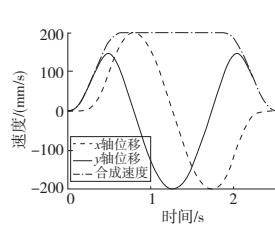


图 6 速度曲线

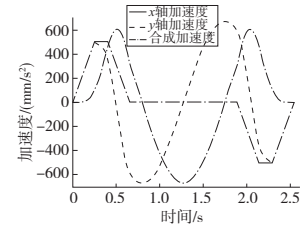


图 7 加速度曲线

由图 4 和图 5 可知,x 轴和 y 轴输出位移曲线相互协调,同时到达各自指定的终点位置,两轴合成的位移曲线为给定的整圆轨迹;由图 6 和图 7 可知,两轴的速度曲线平滑过渡,加速度曲线连续,并且两轴速度曲线、加速度曲线以及合成的速度曲线、加速度曲线的最大值都未超过设定的最大值。

## 4 结语

为了解决数控系统中所缺乏的 7 段式 S 型加减速控制算法的解析式方法,本文利用给定的路径长度与第一临界长度和第二临界长度进行对比,将所有的 S 型曲线的加减速控制划分成 24 种情况,并归纳为 11 种情况的一元二次、一元三次或一元四次方程求解的形式,再利用求根公式即得到 S 型 7 段对应的时间。实验结果表明:所提出的 S 型曲线加减速控制方法计算时间短、精度更高,能很好地满足加工要求,减少了机床运动的冲击和震动,特别适合高精加工,提高了机床的加工精度和效率。

### 参考文献:

- [1] 郭新贵,李从心. 一种新型柔性加减速算法[J]. 上海交通大学学报,2003,37(2):205-207,212.
- [2] 冷洪滨. 高性能数控系统若干关键技术的研究[D]. 杭州:浙江大学,2008.
- [3] 李明,游有鹏,杨雪峰. 一种加加速度连续的加减速算法研究[J]. 机械制造与自动化,2021,50(1):70-73.
- [4] WAN D P, WANG S L, ZHU C C, et al. Feedrate scheduling and jerk control algorithm for high-speed CNC machining[J]. International Journal of Manufacturing Technology and Management, 2009, 17(3):216.
- [5] CHEN Y D, WANG M T, WEI H X, et al. CNC systems linear and S-shaped acceleration and deceleration[J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(15):1600-1603.
- [6] LEE A C, LIN M T, PAN Y R, et al. The feedrate scheduling of NURBS interpolator for CNC machine tools[J]. Computer Aided Design, 2011, 43(6):612-628.
- [7] ALTINTAS Y. Manufacturing automation: metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design[M]. New York:Cambridge University Press, 2000.
- [8] 石川,赵彤,叶佩青,等. 数控系统 S 曲线加减速规划研究[J]. 中国机械工程,2007,18(12):1421-1425.
- [9] 尹国梁. 运动控制系统中 NURBS 曲线插补与速度前瞻算法研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2019.
- [10] 朱明,游有鹏,何均. S 形加减速算法前瞻处理研究[J]. 小型微型计算机系统,2011,32(10):2140-2144.
- [11] 杨亮亮,许守金,史伟民,等. 基于牛顿迭代法的 S 形加减速时间算法研究[J]. 中国机械工程,2015,26(7):912-916,942.

收稿日期:2022-05-05