

DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2024.01.031

# 基于二次摄动法的 SMA 层合梁非线性自由振动分析

张配

(西安铁路职业技术学院 机电工程学院,陕西 西安 710026)

**摘要:**为对 SMA(形状记忆合金)层合梁的非线性自由振动进行分析,使用 Brison 一维本构模型描述 SMA 的力学特性,基于不同剪切函数和 Von Karman 大变形理论,建立梁质点位移与应变之间的关系,使用 Hamilton 变分原理,获得在弹性地基上两端简支 SMA 层合梁的动力学方程并进行无量纲处理。使用二次摄动法获得 SMA 层合梁的非线性自由振动方程。研究不同 SMA 体积分数、预应变、SMA 铺设角度、温度变化对非线性振动的影响。

**关键词:**形状记忆合金;二次摄动法;层合梁;非线性振动

**中图分类号:**TP391.9 **文献标志码:**B **文章编号:**1671-5276(2024)01-0153-04

## Nonlinear Free Vibration Analysis of SMA Laminated Beam Based on Two-step Perturbation Method

ZHANG Pei

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Xi'an Railway Vocational &amp; Technical Institute, Xi'an 710026, China)

**Abstract:**The nonlinear free vibration of SMA (shape memory alloy) laminated beams is analyzed. The mechanical properties of the SMA are described by the Brison one-dimensional constitutive model. Based on different shear functions and Von Karman's large deformation theory, the relationship between beam mass displacement and strain is established. Using Hamilton's variational principle, the dynamic equations of the simply supported SMA laminated beams at both ends on elastic foundations are obtained, and dimensionless processing is carried out. The nonlinear free vibration equation of the SMA laminated beam is obtained by the two-step perturbation method. The effects of different SMA volume fraction, pre-strain, SMA laying angle and temperature change on nonlinear vibration are studied.

**Keywords:**shape memory alloy; two-step perturbation; laminated beam; nonlinear vibration

### 0 引言

复合材料有着优异的力学特性,使得复合材料制成的结构部件被广泛应用于机械工程的各个领域,如交通运输、制造和汽车等领域<sup>[1]</sup>。形状记忆合金(SMA)在受热的情况下会表现出很大的形变,因而可以将 SMA 应用到复合材料领域,实现材料刚度的调节。研究显示,内嵌 SMA 的层合板减小了变形挠度<sup>[2-3]</sup>。SHIAU 等<sup>[4]</sup>的研究得到 SMA 的体积分数和预应变的增加会产生更多的恢复应力,从而增加层合板的刚度。ASADI 等<sup>[3]</sup>的研究显示夹层板的热惯性稳定性可以通过 SMA 丝的体积分数和 SMA 纤维中的预应变来控制。MAHABADI 等<sup>[5]</sup>的研究显示方形 SMA 层合板比有相同长度的矩形板具有更高的基频。

二次摄动用于结构的屈曲与振动分析,有不

少文献关于二次摄动法的应用。张大光<sup>[6]</sup>得到高次摄动解适于描述梁的深度后屈曲和深度非线性弯曲。余桂林<sup>[7]</sup>对比了 KBM 法和二次摄动法在求解大幅振动时的差异,得到二次摄动法更加符合工程实际。BABAEI 等<sup>[8]</sup>用二次摄动法研究了 3 种不同的剪切变形梁在弹性支承上的振动特性。文献[9]中二次摄动法的引入可以不增加计算量,得到结构动力响应的较精确估计。GAO 等<sup>[10]</sup>用二次摄动法得到非局部应变理论和应变梯度理论对线性和非线性有相反的影响频率。SHEN、HUI 等<sup>[11-14]</sup>研究表明 FGM 材料的 FG-X 对称分布可以显著提高频率,得到当温度升高或基础刚度降低时,固有频率降低,但非线性频率比增加,且 Voigt 与 Mori-Tanaka 模型间的结果差异更小。BABAEI 等<sup>[15]</sup>分析了受热传导、线性温度变化、均匀温升等不同类型热环境的 FGM 管。

**基金项目:**陕西省教育厅 2022 年度一般专项科研计划项目(自然科学项目)(22JK0521)

**作者简介:**张配(1987—),女,山东菏泽人,硕士,研究方向为轨道交通机械控制,1254896925@qq.com。

通过对现有文献的梳理,可知尚没有研究使用二次摄动法分析 SMA 层合结构的非线性振动特性。本文考虑了温度变化和不可移动简支边界条件的 SMA 层合梁。使用 Von-Karman 大变形理论描述梁位移与应变的关系,用 Brison 模型描述了不同温度下 SMA 的恢复应力和马氏体体积分数。使用 Hamilton 原理建立了 SMA 层合梁的动力学方程。采用二次摄动法求解这些方程。研究了 SMA 不同初始应变、体积分、铺设角度不同时频率比的变化。

## 1 系统建模

### 1.1 SMA 本构方程

根据 Brison 模型,使用 Reuss 方法计算 SMA 的 Young's 模量<sup>[2]</sup>。考虑零初始条件下,SMA 丝恢复应力为

$$\sigma^r = E_s(\xi)(\varepsilon - \varepsilon_L \xi_s) + \Theta \Delta T \quad (1)$$

式中: $\sigma^r$  是 SMA 丝恢复应力; $E_s(\xi)$  为弹性模量; $\varepsilon$ 、 $\Theta$  分别是 SMA 的应变和热弹性系数; $\varepsilon_L$  为 SMA 最大残余应变; $\xi_s$  为应力诱发的马氏体相变体积分数; $\Delta T$ (相对温度)是加热温度与初始温度的差值。

### 1.2 系统控制方程

图 1 为 SMA 的层合梁示意图。使用 Vigot 模型描述 SMA/石墨/环氧树脂层的物性参数。需要说明的是,材料物性参数的下标“m”和“s”分别表示基体材料(石墨/环氧树脂)和 SMA。梁的横截面为矩形,宽度为  $B$ ,总厚度为  $H$ ,梁的长度为  $L$ ,层数为  $N_l$ ,各层纤维是对称布置的。层合梁受到横向均布载荷  $q$ ,梁在弹性地基上,并处于热环境中。

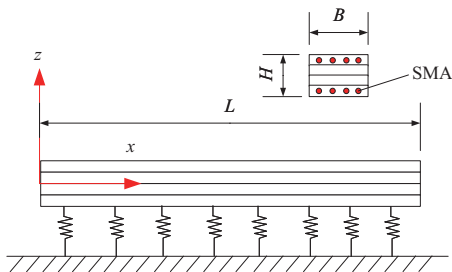


图 1 SMA 层合梁示意图

依据 Reddy 高阶剪切理论以及 Hamilton 原理,可得系统动力学方程为:

$$\bar{I}_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \bar{I}_1 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial t^2} - \bar{I}_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial X \partial t^2} -$$

$$\left[ \frac{\pi a_{11}}{2} \int_0^\pi \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 dX - (N^T - N^r) \right] \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + b_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + d_{11} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial X^3} - a_{55} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) + k_1 W - k_2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + k_3 W^3 = \lambda^q \quad (2)$$

$$\bar{I}_2 \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial t^2} + \bar{I}_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - d_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - f_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + a_{55} \left( \Phi + \frac{\partial W}{\partial X} \right) = 0 \quad (3)$$

式中: $I$  是广义惯量; $X$  是梁的无量纲坐标; $W$  是梁的无量纲横向位移; $\Phi$  是梁的无量纲截面转角; $t$  是无量纲时间; $N^T$  是 SMA 的热力; $N^r$  是 SMA 的恢复力。

## 2 振动分析

本节采用分析法推导出 SMA 层合梁非线性屈曲和自由振动的响应。在本节中,采用二次摄动法进行分析<sup>[16]</sup>,解为

$$\begin{cases} W(X, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n W_i(X, \tau) \varepsilon^i \\ \Phi(X, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(X, \tau) \varepsilon^i \\ \lambda^q(X, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X, \tau) \varepsilon^i \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\varepsilon$  是一个小扰动参数,有  $\tau = \varepsilon t$ ;  $n$  是级数的项数,在本文中取  $n=3$ 。依据摄动参数  $\varepsilon^i$  合并同类项,获得如下微分方程。

一阶摄动方程表示为

$$(N^T - N^r) \frac{\partial^2 W_1}{\partial X^2} + b_{11} \frac{\partial^4 W_1}{\partial X^4} + d_{11} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial X^3} - a_{55} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial X} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial X^2} \right) + k_1 W_1 - k_2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial X^2} = \lambda_1 \quad (5)$$

$$-d_{11} \frac{\partial^3 W_1}{\partial X^3} - f_{11} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X^2} + a_{55} \left( \Phi_1 + \frac{\partial W_1}{\partial X} \right) = 0 \quad (6)$$

二阶摄动方程表示为

$$(N^T - N^r) \frac{\partial^2 W_2}{\partial X^2} + b_{11} \frac{\partial^4 W_2}{\partial X^4} + d_{11} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial X^3} - a_{55} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial X} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial X^2} \right) + k_1 W_2 - k_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial X^2} = \lambda_2 \quad (7)$$

$$-d_{11} \frac{\partial^3 W_2}{\partial X^3} - f_{11} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial X^2} + a_{55} \left( \Phi_2 + \frac{\partial W_2}{\partial X} \right) = 0 \quad (8)$$

三阶摄动方程表示为

$$\varepsilon^2 \left( \bar{I}_0 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \tau^2} - \bar{I}_1 \frac{\partial^4 W_1}{\partial X^2 \partial \tau^2} - \bar{I}_2 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial X \partial \tau^2} \right) -$$

$$\left[ \frac{\pi a_{11}}{2} \int_0^\pi \left( \frac{\partial W_1}{\partial X} \right)^2 dX \right] \frac{\partial^2 W_1}{\partial X^2} + (N^T - N^r) \frac{\partial^2 W_3}{\partial X^2} +$$

$$b_{11} \frac{\partial^4 W_3}{\partial X^4} + d_{11} \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial X^3} - a_{55} \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial X} + \frac{\partial^2 W_3}{\partial X^2} \right) + k_1 W_3 -$$

$$k_2 \frac{\partial^2 W_3}{\partial X^2} + k_3 W_1^3 = \lambda_3 \quad (9)$$

$$\varepsilon^2 \left( \bar{I}_2 \frac{\partial^3 W_1}{\partial X \partial \tau^2} + \bar{I}_3 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \tau^2} \right) - d_{11} \frac{\partial^3 W_3}{\partial X^3} - f_{11} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial X^2} +$$

$$a_{55} \left( \Phi_3 + \frac{\partial W_3}{\partial X} \right) = 0 \quad (10)$$

由满足简支边界条件的解,并使用 Galerkin 法得到:

$$\lambda^q(\xi, \tau, \varepsilon) = \Gamma_0 \frac{\partial^2(\varepsilon A_{10})}{\partial \tau^2} + \Gamma_1(\varepsilon A_{10}) +$$

$$\Gamma_3(\varepsilon A_{10})^3 + \dots \quad (11)$$

上式的系数分别为:

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{\pi}{4} \left[ \bar{I}_0 + m^2 \bar{I}_1 - 2m^2 \bar{I}_2 \frac{d_{11}m^2 + a_{55}}{f_{11}m^2 + a_{55}} + \bar{I}_3 \left( \frac{d_{11}m^3 + a_{55}m}{f_{11}m^2 + a_{55}} \right)^2 \right] \\ \Gamma_1 &= \frac{\pi}{4} \left\{ [a_{55}m^2 - (N^T - N^r)m^2 + b_{11}m^4 + k_1 + k_2m^2] - \right. \\ &\quad \left. \frac{(d_{11}m^3 + a_{55}m)^2}{f_{11}m^2 + a_{55}} \right\} \\ \Gamma_3 &= \frac{m^4 \pi^3 a_{11}}{16} + \frac{3\pi k_3}{16} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

对于自由振动  $\lambda^q = 0$ , 可得系统固有频率为

$$\frac{\omega_{NL}}{\omega_L} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1} \left( \frac{w_{max}}{L} \right)^2}, \quad \omega_L = \sqrt{\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}} \quad (13)$$

式中:  $\omega_{NL}$  为非线性固有频率;  $\omega_L$  是线性固有频率;  $w_{max}$  为变形位移的最大值。

### 3 数值计算

层合梁的长度  $L = 0.2 \text{ m}$ , 宽度  $B = 0.1 \text{ m}$ , 厚度  $H = 0.01 \text{ m}$ 。每一层的厚度是相等的。SMA 的材料参数见文献[2]。初始情况下  $\xi_{70} = 0$ ,  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\sigma_0 = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 0.2\%$ ,  $V_s = 2\%$ 。式(13)可以计算出系统的线性固有频率,非线性频率与线性频率之比。

表1显示不同算法所得 SMA 梁的无量纲线性频率。可知本文方法所得的线性频率与 Ritz<sup>[16]</sup>、GDQ<sup>[17]</sup>的结果差值很小,本文方法和 Ritz 法相差很小,与 GDQ 相差较大。当  $V_s$  较小时频

率随温度的增大而减小,当  $V_s$  较大时线性频率先减小后增大再减小,其变化趋势与文献[3]一致。通过不同方法的对比,证明本文方法是正确的。

表1 不同求解方法的无量纲线性频率

$T/^\circ\text{C}$	$V_s = 5\%$			$V_s = 10\%$		
	本文方法	Ritz	GDQ	本文方法	Ritz	GDQ
20	0.061 89	0.061 84	0.063 12	0.059 92	0.059 86	0.061 06
40	0.061 32	0.061 27	0.062 57	0.059 41	0.059 35	0.060 57
60	0.061 10	0.061 05	0.062 37	0.059 61	0.059 54	0.060 78
80	0.060 64	0.060 59	0.061 93	0.059 33	0.059 26	0.060 51
100	0.060 00	0.059 95	0.061 31	0.058 70	0.058 64	0.059 90

SMA 层合梁的中部挠度与频率比(非线性频率与线性频率之比)如图2所示。SMA 体积分数  $V_s = 2\%$ , 初始应变  $\varepsilon_0 = 0.4\%$ , 长高比  $L/H = 20$ , 不考虑地基的刚度。结果和预期的一样,温度增加时频率比增加,线性固有频率减小。这是因为所选取的温度范围内,热应力比 SMA 恢复应力大得多,结构的刚度主要受热应力的影响,而热应力使梁的刚度减小。

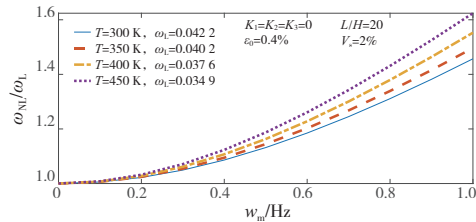


图2 温度变化时的频率

图3中 SMA 体积分数  $V_s = 10\%$ , 初始应变  $T = 120 \text{ }^\circ\text{C}$ , 长高比  $L/H = 30$ , 不考虑地基的刚度。SMA 初始应变增加,频率比减小,线性频率增加。温度不变时结构热应力不变,结构刚度的变化主要受 SMA 恢复应力的影响,初始应变越大, SMA 恢复应力越大,导致系统刚度增加。

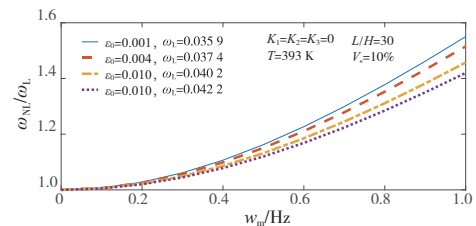


图3 初始应变变化时的频率

图4中 SMA 初始应变  $\varepsilon_0 = 0.4\%$ ,  $T = 150 \text{ }^\circ\text{C}$ , 长高比  $L/H = 30$ , 不考虑弹性地基的作用。SMA 体积分数增加,频率比减小,线性频率减小,主要

原因是 SMA 体积分数越大, 结构中的金属相组分越多, 系统的刚度越大, 等效密度也增大, 这样广义惯量的增加对系统频率的影响大于刚度。

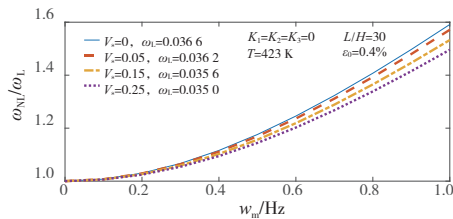


图 4 体积分数变化时的频率

图 5 是长高比对频率的影响曲线。长高比  $L/H$  增大时频率比增大, 线性频率减小。这是由于 SMA 梁跨度增大使柔度增加所导致的。 $L/H$  越大时系统的非线性特性越显著。观察到  $L/H$  比对频率比的影响在较低的长高比下更为明显。

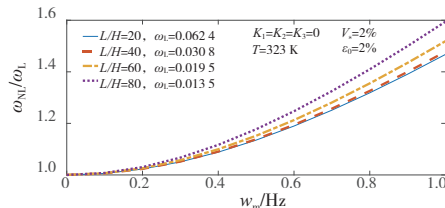


图 5 长高比变化时的频率

图 6 是 SMA 角度对频率的影响曲线, 可以看出 SMA 铺设角度越大, 梁的线性固有频率越小, 而频率比越大。这是由于随着 SMA 铺设方向与主方向之间角度的增加, 系统的总刚度降低导致的。

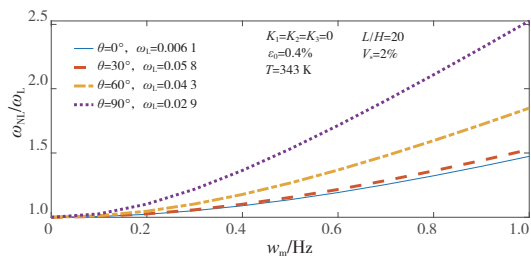


图 6 SMA 角度对频率的影响

## 4 结语

利用 Hamilton 变分原理, 建立了 SMA 层合梁的动力学方程。使用二次摄动法研究了系统的自由振动特性, 得出如下结论。

1) 较低的温度下, 热应力占主导, 温度上升使得线性固有频率下降。

2) 初始应变越大 SMA 恢复应力越大, 系统刚度越大; SMA 体积分数越大, 系统的刚度、惯量同时增加, 惯量的增加大于刚度的增加。

3) 长高比增大时, 频率比增大, 线性频率减小; SMA 铺设方向与主方向夹角的增加, 导致线性频率下降, 而频率比上升。

## 参考文献:

- [1] 叶鑫, 安鲁陵, 岳烜德, 等. 间隙与垫片补偿下复材-铝合金结构表面应变的研究[J]. 机械制造与自动化, 2020, 49(6): 18-20, 35.
- [2] EBRAHIMI M R, MOEINFAR A, SHAKERI M. Nonlinear free vibration of hybrid composite moving beams embedded with shape memory alloy fibers[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2016, 16(7): 1550032.
- [3] ASADI H, KIANI Y, SHAKERI M, et al. Exact solution for nonlinear thermal stability of hybrid laminated composite Timoshenko beams reinforced with SMA fibers[J]. Composite Structures, 2014, 108: 811-822.
- [4] SHIAU L C, KUO S Y, CHANG S Y. Free vibration of buckled SMA reinforced composite laminates[J]. Composite Structures, 2011, 93(11): 2678-2684.
- [5] MAHABADI R K, PAZHOOH M D, SHAKERI M. On the free vibration and design optimization of a shape memory alloy hybrid laminated composite plate[J]. Acta Mechanica, 2021, 232(1): 323-343.
- [6] 张大光. Euler-Bernoulli 梁的高阶二次摄动解及收敛性讨论[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(6): 620-629.
- [7] 余桂林. 基于 Euler-Bernoulli 梁理论研究热膨胀下梁的非线性振动问题[J]. 应用力学学报, 2015, 32(3): 366-371.
- [8] BABAEI H, KIANI Y, ESLAMI M R. Vibrational behavior of thermally pre-/ post-buckled FG-CNTRC beams on a nonlinear elastic foundation: a two-step perturbation technique[J]. Acta Mechanica, 2021, 232(10): 3897-3915.
- [9] 李琦, 邱志平, 张旭东. 基于二阶摄动法求解区间参数结构动力响应[J]. 力学学报, 2015, 47(1): 147-153.
- [10] GAO Y, XIAO W S, ZHU H P. Nonlinear vibration analysis of different types of functionally graded beams using nonlocal strain gradient theory and a two-step perturbation method[J]. The European Physical Journal Plus, 2019, 134(1): 23.
- [11] SHEN H S, XIANG Y, LIN F. Thermal buckling and postbuckling of functionally graded graphene-reinforced composite laminated plates resting on elastic foundations[J]. Thin-Walled Structures, 2017, 118: 229-237.

(下转第 201 页)



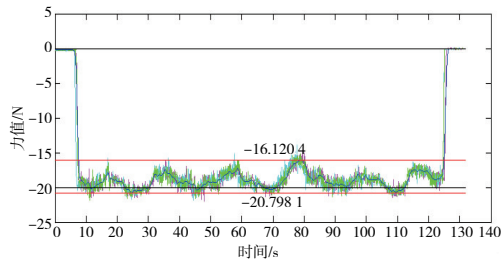


图 15 工业机器人末端 z 轴力

### 3 结语

本文就工业机器人提出一种自由曲面磨抛轨迹自动生成方法,重点对工件 STL 模型进行 Bezier 三角曲面拟合,进而得到拟合曲面方程。其次,利用等参数法和曲线偏置的方法,得到工业机器人进行跟踪控制的全部轨迹,并对加工工件的自由曲面生成了螺旋式磨抛轨迹。同时,补充了曲面偏置的方法,通过轨迹的转换算法生成了机器人加工过程中磨抛轨迹位移曲线,解决了曲线偏置时的干涉问题,并通过间接力/位置的控制方法进行曲面跟踪控制。最后通过磨抛实验平台对机器人力觉伺服轨迹规划方法进行实验验证,一是在跟踪进给速度为 10 mm/s 的情况下曲面跟踪误差只有不到 0.3 mm,证明了利用机器人速度控制指令实现机器人的轨迹跟踪控制效果与精度良好;二是工业机器人在单轴力控制模式下,目标接触摩擦力为 20 N 时,工业机器人末端工具与工件接触并保持接触力稳定的响应时间在 0.5 s 以内,稳定后接触摩擦力值在目标接触摩擦力的 $\pm 3$  N 区间内,证明了力控制方法具有稳定性;三是加入工业机器人力控制技术后,z 轴末端的受力能够控制在 $\pm 4$  N 范围内,证明了本文方法的有效

性。本文对机器人力控制的轨迹规划展开的研究,对于曲面跟踪控制的研究具有一定意义。

### 参考文献:

- [1] 詹建明. 机器人研磨自由曲面时的作业环境与柔顺控制研究[D]. 长春:吉林大学,2002.
- [2] PAN H P, FENG H, CAO L G. Trajectory generation for glazing spray Gun based on STL model[J]. Applied Mechanics and Materials,2014,487:617-620.
- [3] LIN F Y, LÜ T S. Development of a robot system for complex surfaces polishing based on CL data[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology,2005,26(9):1132-1137.
- [4] IM Y T, WALCZYK D F. A CNC cutting trajectory algorithm for profiled edge lamination tooling[J]. Rapid Prototyping Journal,2002,8(5):290-299.
- [5] 徐金亭,刘伟军,卞宏友,等. 基于网格曲面模型的等残留刀位轨迹生成方法[J]. 机械工程学报,2010,46(11):193-198.
- [6] 赵萍,孙红. 基于 STL 模型的数控加工路径规划[J]. 机械设计与制造,2009(12):169-170.
- [7] 傅雅宁. 计算机图形学教程[M]. 北京:国防工业出版社,2005.
- [8] TAM H Y, LUI C H, MOK A. Robotic polishing of free-form surfaces using scanning paths[J]. Journal of Materials Processing Technology, 1999, 95(1/2/3):191-200.
- [9] 殷跃红,朱剑英,尉忠信. 机器人力控制研究综述[J]. 南京航空航天大学学报,1997,29(2):220-230.
- [10] 范云霄,马静敏,沈友徽. 非圆曲线的等误差圆弧逼近法及刀具轨迹仿真[J]. 煤矿机械,2004,25(12):77-78.
- [11] 郑权. 公自转轮带磨抛装置设计及磨抛工艺研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2021.

收稿日期:2022-06-23

(上接第 156 页)

- [12] SHEN H S, LIN F, XIANG Y. Nonlinear vibration of functionally graded graphene-reinforced composite laminated beams resting on elastic foundations in thermal environments[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 90(2):899-914.
- [13] SHEN H S. Nonlinear vibration of shear deformable FGM cylindrical shells surrounded by an elastic medium[J]. Composite Structures, 2012, 94(3):1144-1154.
- [14] HUI S S, XIANG Y, FAN Y, et al. Nonlinear bending analysis of FG-GRC laminated cylindrical panels on elastic foundations in thermal environments[J]. Composites Part B Engineering, 2018, 141:148-157.

- [15] BABAEI H, KIANI Y, ESLAMI M R. Thermal buckling and post-buckling analysis of geometrically imperfect FGM clamped tubes on nonlinear elastic foundation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 71:12-30.
- [16] 张俊,李天匀,朱翔,等. 基于改进 Rayleigh-Ritz 法的复杂形状平面薄板自振特性分析[J]. 振动与冲击,2019,38(19):45-51.
- [17] 蒲育,滕兆春. 基于一阶剪切变形理论 FGM 梁自由振动的改进型 GDQ 法求解[J]. 振动与冲击,2018,37(16):212-218.

收稿日期:2022-12-15