

DOI:10.19344/j. cnki. issn1671-5276.2024.03.026

计算重根特征向量灵敏度的正则完备法

李成立, 王彤

(南京航空航天大学 航空学院, 江苏 南京 210016)

摘 要:在基于灵敏度分析的轴对称模型修正中,重根特征向量灵敏度是较为重要的确定结构参数优化方向的参数。以杨秋伟提出的计算特征向量灵敏度的方法为基础,在支配方程的两侧加上一个可调整的正则项以消除动刚度阵的奇异性,并结合完备模态法计算模态参与因子,提出了正则完备法。虽然该法以计算重根特征向量灵敏度而推导,但也可用于单根特征向量灵敏度的计算。通过试验算例验证了所提方法在轴对称模型修正的可行性。

关键词:轴对称模型修正;重根特征向量;特征向量灵敏度

中图分类号:TP391.9 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2024)03-0123-04

Regular Complete Method for Computing Sensitivity of Repeated Root Eigenvectors

LI Chengli, WANG Tong

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract:In the sensitivity-based model updating of the axisymmetric structure, the sensitivity of the repeated root eigenvectors is a crucial parameter to determine the optimization direction of structural parameters. Based on the method of calculating eigenvector sensitivity proposed by YANG Qiuwei, regular complete method is proposed by adding an adjustable regular term on both sides of the governing equation to eliminate the singularity of the dynamic stiffness matrix and combining with the complete modal method to calculate the modal participation factor. Although the method is derived by calculating the sensitivity of the repeated root eigenvectors, it can also be used for the calculation of the sensitivity of the single root eigenvector. Experimental examples verify the feasibility of the proposed method in axisymmetric model updating.

Keywords:axisymmetric model updating; repeated root eigenvectors; eigenvector sensitivity

0 引言

特征灵敏度是基于灵敏度分析模型修正的重要研究内容之一,可以确定结构参数优化方向。最早由 FOX 和 ROGERS 给出了特征灵敏度关于结构设计变量的推论式,NELSON^[1]在 FOX 的推论基础上建立了关于单根特征向量灵敏度的表达式,OJALVO^[2]将 Nelson 法扩展到重根特征向量;MILLS-CURRAN^[3]对 Ojalvo 法通解的普遍计算式进行了合理的改进,上述方法又称为直接求导法。完备模态法^[4]可以精确求解单、重根特征向量灵敏度且只需要本阶模态,适用于特征值为分离或多重的情况,缺点是不易求解等效高阶模态,计算效率低。高精度模态法将特征向量导数表示为完备组的线性组合,再考虑高阶模态的近似贡献。完备模态法和高精度模态法将特征向量灵敏度表征为所有特征向量线性组合去求解,所以又被称为模态法。

轴对称模型修正需要进行测量模态与有限元模型之间的相关性分析,最后以测量模态进行修正。轴对称结构的重根模态具有固有频率接近,振型偏转一定角度的特点,致使两模态的 MAC 值很差。李效法^[5]提出等价振型转换法并考虑到了模态遗漏,将有限元重根振型进行转换。经过振型转换后,通过相关性分析找到相匹配的模态并计算参数灵敏度,最后对有限元模型进行修正。

直接求导法和模态法可以分为单根和重根两种情况讨论。在单、重根特征向量的情况下,直接求导法的支配方程系数阵奇异性和待定系数计算方法不同,模态法则是模态参与因子计算方法互异。而且,Nelson 法和模态叠加法只适用于单根的情况,改进 Nelson 法和完备模态法适用于单、重根的情况。杨秋伟等^[6]在 Nelson 法计算特征向量导数的支配方程两侧加上一个正则项,将系数阵变为非奇异矩阵并求逆和转换多余的正则项,从而推导出求解单根特征向量灵敏度的公式。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(12272172);江苏高校优势学科建设工程资助项目

第一作者简介:李成立(1995—),男,河南周口人,硕士研究生,研究方向为动力学模型修正与确认,lcl1995@nuaa.edu.cn。

本文在文献[7]求解单根特征向量灵敏度的基础上,提出正则完备法。

1 理论背景

1.1 重根特征向量灵敏度分析方法

假设一个具有 n 自由度的对称无阻尼系统,刚度矩阵为 $\mathbf{K}$ 和质量矩阵为 $\mathbf{M}$,则考虑如下动力学问题:

$$\mathbf{K}\mathbf{Z} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{Z} \quad (1)$$

$$\mathbf{Z}^T\mathbf{M}\mathbf{Z} = \mathbf{I}_{m \times m} \quad (2)$$

式中: λ 为 m 重根; $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_r, \dots, z_m)$ 是相应的 $m(m < n)$ 重根特征向量, $r=1, 2, \dots, m$; $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{M}$ 、 λ 和 $\mathbf{Z}$ 均为设计参数 p_j 的函数; $\mathbf{I}$ 为 $m \times m$ 阶单位矩阵。将式(1)两边对参数 p_j 求偏导,并移项整理可得:

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{Z}' = \mathbf{M}\mathbf{Z}\Lambda' - (\mathbf{K}' - \lambda\mathbf{M}')\mathbf{Z} = \mathbf{G} \quad (3)$$

式中: Λ' 为重根特征值 $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_m)$ 对设计参数 p_j 的 1 阶导数,也称为特征值灵敏度; $\mathbf{Z}'$ 为重根特征向量对设计参数 p_j 的特征向量灵敏度。由文献[3]可得单、重根特征值灵敏度的计算公式:

$$\Lambda' = \mathbf{Z}^T(\mathbf{K}' - \lambda\mathbf{M}')\mathbf{Z} \quad (4)$$

1.2 正则完备法

首先,完备模态法是将特征向量导数 $\mathbf{Z}'$ 展开成实用完备模态 $[\Phi_k, \Psi_h]$ 的线性组合,即

$$\mathbf{Z}' = [\Phi_k, \Psi_h] \begin{bmatrix} \mathbf{C}_k \\ \mathbf{C}_h \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}, \bar{\Phi}_k, \Psi_h] \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \bar{\mathbf{C}}_k \\ \mathbf{C}_h \end{bmatrix} = \bar{\Phi}\bar{\mathbf{C}} \quad (5)$$

式中: Φ_k 为结构的已知低阶模态; $\bar{\Phi}_k$ 为不包含待求导的特征向量 $\mathbf{Z}$ 的已知低阶特征向量; Ψ_h 为等效高价模态; $\mathbf{C}$ 为系数矩阵,即

$$\Phi_h \Phi_h^T \mathbf{M} = \mathbf{I} - \Phi_k \Phi_k^T \mathbf{M} = \bar{\Psi}_h \quad (6)$$

式中: Φ_h 是结构的质量归一化高阶模态; $\bar{\Psi}_h$ 是 $n \times n$ 维矩阵,但秩仅为 $h(n=k+h)$ 。当消除 k 个不唯一的非独立列,就获得了等效高价模态 Ψ_h ,且与 Φ_k 具有正交性。

由文献[4]可得因子 $\mathbf{C}$ 的对角元素计算式为

$$\mathbf{C}^T + \mathbf{C} = -\mathbf{Z}^T \mathbf{M}' \mathbf{Z} = \hat{\mathbf{q}} \quad (7)$$

$\mathbf{C}$ 的非对角元素由下式计算:

$$\mathbf{C}\Lambda' - \Lambda'\mathbf{C} = \mathbf{Z}^T(\mathbf{K}' - \lambda\mathbf{M}')\bar{\Phi}_k \bar{\mathbf{C}}_k + \mathbf{Z}^T(\mathbf{K}' - \lambda\mathbf{M}') \cdot \Psi_h \mathbf{C}_h - \mathbf{Z}^T \mathbf{M}' \mathbf{Z} \Lambda' + 0.5\mathbf{Z}^T(\mathbf{K}'' - \lambda\mathbf{M}'')\mathbf{Z} - 0.5\Lambda'' = \hat{\mathbf{R}} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{K}''$ 和 $\mathbf{M}''$ 分别为刚度矩阵和质量矩阵对设计参数 p_j 的 2 阶导数; Λ'' 为特征值对设计参数 p_j 的 2 阶导数。于是, $\mathbf{C}$ 的计算式可总结为

$$\mathbf{C}_{ij} = \begin{cases} \hat{R}_{ij}/(\lambda'_j - \lambda'_i), & \lambda'_j \neq \lambda'_i \\ \hat{q}_{ij}, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

将式(3)左右两边增加正则项 $\varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K}\mathbf{Z}'$,其中 ε 为任意非 0 实数,则式(3)变为

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} + \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K})\mathbf{Z}' = \mathbf{M}\mathbf{Z}\Lambda' - (\mathbf{K}' - \lambda\mathbf{M}')\mathbf{Z} + \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K}\mathbf{Z}' \quad (10)$$

将式(5)代入正则项 $\varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K}\mathbf{Z}'$ 可得:

$$\varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K}\mathbf{Z}' = \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}, \bar{\Phi}_k, \Psi_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \bar{\mathbf{C}}_k \\ \mathbf{C}_h \end{bmatrix} = \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K}(\mathbf{Z}\mathbf{C} + \bar{\Phi}_k \bar{\mathbf{C}}_k + \Psi_h \mathbf{C}_h) \quad (11)$$

由完备模态的正交性可知,上式可变为

$$\varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K}\mathbf{Z}' = \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K}\mathbf{Z}\mathbf{C} = \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{C} \quad (12)$$

将上式代入式(10)得

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} + \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K})\mathbf{Z}' = \mathbf{M}\mathbf{Z}\Lambda' - (\mathbf{K}' - \lambda\mathbf{M}')\mathbf{Z} + \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{C} \quad (13)$$

对于系数阵 $\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} + \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K}$,左乘以 $\mathbf{Z}^T$,右乘以 $\mathbf{Z}$ 则得:

$$\mathbf{Z}^T(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} + \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K})\mathbf{Z} = \Lambda - \lambda\mathbf{I}_{m \times m} + \varepsilon\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\Lambda = \varepsilon\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\Lambda \quad (14)$$

由式(14)可得,当 ε 为非 0 实数时,系数阵 $\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} + \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K}$ 非奇异。将式(13)直接求逆,可得重根特征向量灵敏度的解:

$$\mathbf{Z}' = (\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} + \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\mathbf{K})^{-1}[\mathbf{M}\mathbf{Z}\Lambda' - (\mathbf{K}' - \lambda\mathbf{M}')\mathbf{Z} + \varepsilon\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{C}] \quad (15)$$

综上,式(15)为正则完备法。该公式可以只用本阶模态计算特征向量灵敏度。将 $\mathbf{Z}$ 、 Λ 和 Λ' 看作单根时,就等于文献[6]所提的计算单根特征向量灵敏度的方法。所以,该法适用于单、重根特征向量灵敏度的计算。当 $\lambda'_j \neq \lambda'_i$ 时(即 m 重根特征值灵敏度分离),可以忽略等效高阶模态对特征向量导数的贡献,即删去式(8)中右边第 2 项 $\mathbf{Z}^T(\mathbf{K}' - \lambda\mathbf{M}')\Psi_h \mathbf{C}_h$,式(15)为近似法。

2 算例分析

试验算例将用完备模态法和正则完备法计算除刚体模态外的前 3 阶特征向量灵敏度。以图 1 中放在海绵垫上的圆盘为例,建立有限元模型。有限元模型有 432 个 SHELL181 单元,433 个节点,2 598 个自由度。圆盘材料为铁,假设初始材

料属性弹性模量 $E = 220 \text{ GPa}$, 密度 $\rho = 8\ 000 \text{ kg/m}^3$, 泊松比 $\mu = 0.3$; 模型尺寸圆盘半径 $r = 0.25 \text{ m}$, 厚度 $t \approx 0.004 \text{ m}$ (误差不超过 $5 \times 10^{-4} \text{ m}$)。由于篇幅限制, 计算 E, ρ 和 t 的前 2 阶特征值灵敏度如表 1 所示; E, ρ 和 t 的前 3 阶特征向量灵敏度(取前 12 个自由度的数据)分别如表 2、表 3 和表 4 所示。记第 i 阶特征值对 E, ρ 和 t 的特征值灵敏度分别为 $\frac{\partial \lambda_i}{\partial E}$ 、 $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \rho}$ 和 $\frac{\partial \lambda_i}{\partial t}$, 第 i 阶特征向量对 E, ρ 和 t 的特征向量灵敏度分别为 $\frac{\partial \mathbf{Z}_i}{\partial E}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{Z}_i}{\partial \rho}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{Z}_i}{\partial t}$ 。

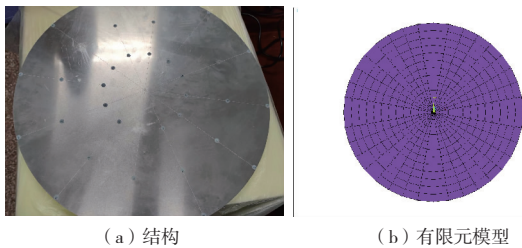


图 1 圆盘结构及有限元模型

表 1 特征值灵敏度计算结果对比

方法	$\frac{\partial \lambda_7}{\partial E}$	$\frac{\partial \lambda_8}{\partial E}$	$\frac{\partial \lambda_7}{\partial \rho}$	$\frac{\partial \lambda_8}{\partial \rho}$	$\frac{\partial \lambda_7}{\partial t}$	$\frac{\partial \lambda_8}{\partial t}$
方法 1	1.41×10^{-6}	1.41×10^{-6}	-36.82	-36.82	1.52×10^8	1.52×10^8
方法 2	1.40×10^{-6}	1.40×10^{-6}	-37.87	-37.87	1.52×10^8	1.52×10^8

表 2 特征向量关于弹性模量的灵敏度结果对比 ($\times 10^{-14}$)

自由度号	$\frac{\partial \mathbf{Z}_7}{\partial \rho}$		$\frac{\partial \mathbf{Z}_8}{\partial \rho}$		$\frac{\partial \mathbf{Z}_9}{\partial \rho}$	
	方法 3	方法 4	方法 3	方法 4	方法 3	方法 4
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.49	0.49	3.26	3.26	1.56	1.56
4	24.37	24.37	-14.46	-14.46	-6.83	-6.83
5	36.45	36.45	2.86	2.86	-13.25	-13.25
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	-0.89	-0.89	3.82	3.82	2.01	2.01
10	39.67	39.66	-14.12	-14.12	-13.34	-13.34
11	26.59	26.59	3.22	3.22	-10.51	-10.53
12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

表 3 特征向量关于密度的灵敏度结果对比 ($\times 10^{-4}$)

自由度号	$\frac{\partial \mathbf{Z}_7}{\partial \rho}$		$\frac{\partial \mathbf{Z}_8}{\partial \rho}$		$\frac{\partial \mathbf{Z}_9}{\partial \rho}$	
	方法 3	方法 4	方法 3	方法 4	方法 3	方法 4
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.45	0.45	-0.23	-0.23	-0.28	-0.28
4	2.01	2.01	3.97	3.97	0.00	0.00
5	3.27	3.25	-1.66	-1.65	-4.59	-4.59
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.35	0.35	-0.37	-0.37	-0.28	-0.28
10	2.76	2.76	3.46	3.45	0.79	0.79
11	3.03	3.02	-2.11	2.09	-4.53	-4.53
12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

表 4 特征向量关于厚度的灵敏度结果对比

自由度号	$\frac{\partial \mathbf{Z}_7}{\partial \rho}$		$\frac{\partial \mathbf{Z}_8}{\partial \rho}$		$\frac{\partial \mathbf{Z}_9}{\partial \rho}$	
	方法 3	方法 4	方法 3	方法 4	方法 3	方法 4
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	92.32	91.48	-43.21	-46.76	-55.83	-55.92
4	401.87	396.61	795.86	792.64	-18.57	-16.37
5	667.96	663.39	-338.98	-348.56	-934.48	-933.51
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	70.96	70.35	-71.68	-75.08	-55.05	-55.24
10	557.33	552.19	699.51	695.97	141.50	143.96
11	619.67	615.11	-427.91	-437.33	-918.19	-917.18
12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

受文献[7]的启发, 本文用 MatLab 调用自编的 APDL 灵敏度计算脚本, 再由 MatLab 所编写的修正迭代算法对设计参数进行修正。因此, ANSYS 运行 APDL 自编脚本所获得的特征灵敏度如下。在表 1 中, 方法 1 为有限差分法, 方法 2 为式(4)所示方法。保留一定精度, 表 1 中两种方法计算的第 7 阶和第 8 阶特征值对 E, ρ 和 t 的灵敏度都相同。因此, 利用式(15)计算第 7 阶和第 8 阶重根特征向量对 E, ρ 和 t 的灵敏度时, 可当作

$\lambda'_j=\lambda'_i$ 。此时,本文所提方法为精确法。在表2—表4中,正则完备法为方法3,完备模态法为方法4。两种方法的计算结果相比,证明正则完备法可用于计算特征向量灵敏度。另外,计算第7阶特征向量对密度的灵敏度时,完备模态法所用时间约为8.47 s,而正则完备法所用时间约为0.89 s,由此可知大幅提高了计算效率且更易编程。

根据特征值灵敏度分析,选取对特征值敏感

表5 用正则完备法和改进 Nelson 法分别计算特征向量灵敏度时,修正前后有限元数据与试验数据的对比

项目	试验模态		有限元修正前模态				有限元修正后模态 (正则完备法)				有限元修正后模态 (改进 Nelson 法)			
	阶数	频率/ Hz	阶数	频率/ Hz	误差/ %	$M_{AC}/\%$	阶数	频率/ Hz	误差/ %	$M_{AC}/\%$	阶数	频率/ Hz	误差/ %	$M_{AC}/\%$
参与修正 的模态	1	82.36	7	87.60	6.37	97.10	7	82.69	0.40	97.18	7	82.71	0.42	97.18
	2	83.46	8	87.60	4.96	96.12	8	82.69	0.92	96.85	8	82.71	0.90	96.85
	3	134.20	9	145.72	8.59	97.45	9	137.55	2.50	99.47	9	137.58	2.52	99.47
	4	202.88	10	205.88	1.48	98.61	10	194.34	4.21	99.44	10	194.38	4.19	99.44
	5	313.49	13	335.12	6.90	98.13	13	316.33	0.91	98.82	13	316.39	0.93	98.82
	6	314.26	12	335.12	6.64	95.44	12	316.33	0.66	99.27	12	316.39	0.68	99.27
预测模态	7	351.91	15	368.61	4.75	97.15	15	347.94	1.13	98.76	15	348.01	1.11	98.76
	8	352.36	14	368.61	4.61	96.71	14	347.94	1.25	98.05	14	348.01	1.23	98.05

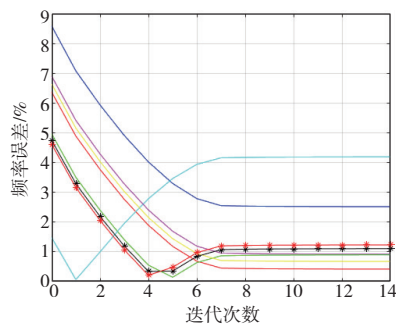


图2 改进 Nelson 法计算特征向量灵敏度时,频率误差迭代图

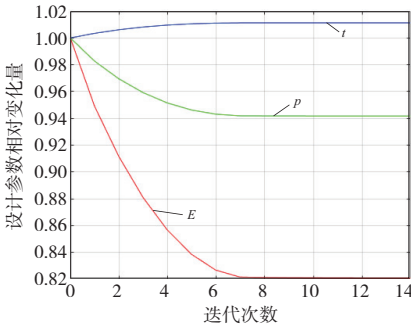


图3 改进 Nelson 法计算特征向量灵敏度时,设计参数相对变化量迭代图

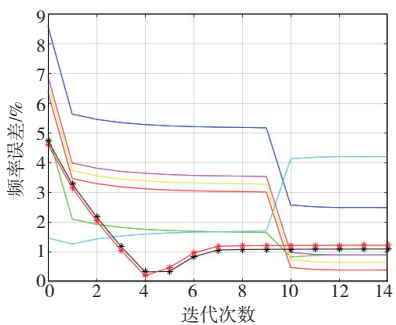


图4 正则完备法计算特征向量灵敏度时,频率误差迭代图

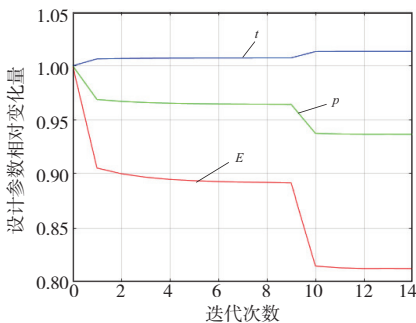


图5 正则完备法计算特征向量灵敏度时,设计参数相对变化量迭代图

的 E 、 ρ 和 t 为修正参数。采用正则完备法和改进 Nelson 法计算特征向量灵敏度,再对圆盘进行修正。另外,有限元数据与试验数据的对比如表5所示;频率误差的迭代变化分别如图2和图4所示(本刊为黑白印刷,如有疑问请咨询作者);设计参数相对变化量的迭代变化分别如图3和图5所示(红线为 E 、绿线为 ρ 、蓝线为 t)。

预测模态,比较修正后频率误差和 MAC 值。由图2—图5可知,正则完备法和改进 Nelson 法参与修正时,经过14次迭代测量模态与有限元模型之间的频率误差和设计参数达到收敛。由表5可知,修正前频率误差最大为第3阶8.59%,最小为第4阶1.48%,但 MAC 值都较高。正则完备法参与修正时,最小为第1阶0.40%,第4阶频率误差变大为4.21%。改进 Nelson 法参与修正时,最小为第1阶0.42%,第4阶频率误差变大为4.19%。但两种方法相比,修正后频率误差都在5%以下,频率平均误差都为1.50%,预测模态的频率误差

(下转第145页)

类中心的方法分割效果明显优于 Kmenas 的随机选取方法。

4 结语

本文通过对经典 SLIC 算法的实现步骤进行分析,从 RGB 转 Lab 颜色空间和采用 APMMD 算法初始化种子点两方面对其进行优化,进行了实验验证,证明了颜色空间转换时速度和内存都有进步;种子点聚类时,聚类准确率提高、迭代次数下降。

实验中也发现:本文算法存在过分割的可能性,且容易生成无关边界,特别是对亮度高的物品生成的无关边界更多。因此,下一步的研究方向可以从增强连通性、去除无关边界两方面考虑。

参考文献:

- [1] REN X F, MALIK J. Learning a classification model for segmentation [C]//Proceedings Ninth IEEE International Conference on Computer Vision. Nice, France:IEEE,2008:10-17.
- [2] 周丽娟,王慧,王文伯,等. 面向海量数据的并行 Kmeans 算法[J]. 华中科技大学学报(自然科学版),2012,40(增刊1):150-152.

- [3] 程艳云,周鹏. 动态分配聚类中心的改进 K 均值聚类算法[J]. 计算机技术与发展,2017,27(2):33-36.
- [4] 王美琪,李建. 一种改进 K-means 聚类的近邻传播最大最小距离算法[J]. 计算机应用与软件,2021,38(7):240-245.
- [5] ACHANTA R, SHAJI A, SMITH K, et al. SLIC superpixels compared to state-of-the-art superpixel methods[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2012,34(11):2274-2282.
- [6] DONG L L, ZHANG W D, XU W H. Underwater image enhancement via integrated RGB and LAB color models[J]. Signal Processing: Image Communication, 2022,104:116684.
- [7] 刘江华. 一种基于 kmeans 聚类算法和 LDA 主题模型的文本检索方法及有效性验证[J]. 情报科学,2017,35(2):16-21,26.
- [8] 宋熙煜,周利莉,李中国,等. 图像分割中的超像素方法研究综述[J]. 中国图象图形学报,2015,20(5):599-608.
- [9] 王春瑶,陈俊周,李炜. 超像素分割算法研究综述[J]. 计算机应用研究,2014,31(1):6-12.

收稿日期:2022-10-27

(上接第 126 页)

都在 1.3% 以下,MAC 值都有所改善,且修正后的 MAC 值一致。修正后,改进 Nelson 法的设计参数为 $E=180.18 \text{ GPa}$ 、 $\rho=7530.05 \text{ kg/m}^3$ 和 $t=4.04 \times 10^{-3} \text{ m}$,而正则完备法的设计参数为 $E=178.75 \text{ GPa}$ 、 $\rho=7491.81 \text{ kg/m}^3$ 和 $t=4.05 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。总体来看,两种方法修正后频率和 MAC 值都符合工程要求,且修正后的设计参数符合圆盘(铁)的材料属性和厚度误差。因此,正则完备法可用于模型修正。

3 结语

本文参考文献[6]的思想,提出计算特征向量灵敏度的正则完备法。通过在计算重根特征向量灵敏度支配方程的两侧增加一个正则项,把系数矩阵由奇异矩阵变形为非奇异矩阵,从而可以通过直接求逆快速计算出特征向量灵敏度,且所提的计算公式适用于单、重根特征向量。相比于改进 Nelson 法和完备模态法,该法在操作上更加简便,且更易于编程。理论上,正则完备法为精确法。但用式(9)计算系数阵 C 忽略等效高阶模态对特征向量导数的贡献时,该法为近似法。以圆盘结

构为例对所提方法进行了验证,结果表明所提方法在计算特征向量灵敏度和模型修正方面是合理可行的,在工程实践中也有较广阔的应用前景。

参考文献:

- [1] NELSON R B. Simplified calculation of eigenvector derivatives[J]. AIAA Journal,1976,14(9):1201-1205.
- [2] OJALVO I. Gradients for large structural models with repeated frequencies [J]. Society of Automotive Engineers, Warrendale:1986:86-1789.
- [3] MILLS - CURRAN W C. Comment on "eigenvector derivatives with repeated eigenvalues" [J]. AIAA Journal,1990,28(10):1846.
- [4] 张德文,魏阜旋. 重根特征向量导数计算的完备模态法[J]. 固体力学学报,1992,13(4):347-352.
- [5] 李效法. 基于灵敏度分析的模型修正研究及其实现[D]. 南京:南京航空航天大学,2007.
- [6] 杨秋伟,汪振东,梅红蕾. 特征向量灵敏度计算的一种新方法[J]. 应用力学学报,2021,38(3):1239-1244.
- [7] 周建君,许俊海,范青山,等. ABAQUS 二次开发在自冲铆接模拟中的研究[J]. 机械制造与自动化,2021,50(5):146-148.

收稿日期:2022-11-15