

DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2025.03.026

一种基于凸优化技术的航天器轨迹快速优化框架

金帅辰

(南京航空航天大学 航天学院, 江苏 南京 211106)

摘 要:交会与接近操作频繁出现在航天技术发展的各种空间任务,提高在轨航天器快速入轨和任务拓展对于节约人力、物力具有重要意义。结合 Birkhoff 谱方法,提出一种基于凸优化技术的航天器轨迹快速优化框架。建立二体相对运动的动力学模型,引入最优控制理论并采用凸优化技术处理非线性约束;制定基于 1 阶微分的 Birkhoff 伪谱法(FBPSM)和基于 2 阶微分的 Birkhoff 伪谱法(SBPSM)的理论框架。研究结果表明:对于复杂动力学系统,FBPSM 和 SBPSM 不仅继承了传统伪谱法的求解优势,还将计算效率提高了 3 倍左右。该研究可为航天器轨迹的实时重构和快速优化提供理论参考和技术支持。

关键词:在轨航天器;交会与接近操作;轨迹优化;Birkhoff 谱方法;凸优化技术;最优控制理论

中图分类号:V412.4 **文献标志码:**B **文章编号:**1671-5276(2025)03-0132-07

Rapid Optimization Framework for Spacecraft Trajectories Based on Convex Optimization Technology

JIN Shuaichen

(College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)

Abstract: As rendezvous and approach operations frequently appear in various space missions related to the development of aerospace technology, improving the rapid orbit insertion and mission expansion of in-orbit spacecraft is of great significance for saving manpower and material resources. A rapid optimization framework for spacecraft trajectory based on convex optimization techniques was proposed by Birkhoff pseudospectral method. A dynamic model of two-body relative motion was established, optimal control theory was introduced, and convex optimization techniques were used to handle nonlinear constraints. The theoretical frameworks of Birkhoff pseudospectral method based on first-order differentiation (FBPSM) and second-order differentiation (SBPSM) were developed. The results indicate that FBPSM and SBPSM not only inherit the solving advantages of traditional pseudospectral methods, but also increase computational efficiency by about three times in terms of complex dynamical systems. This study provides the theoretical reference and technical support for real-time reconstruction and rapid optimization of spacecraft trajectories.

Keywords: in-orbit spacecraft; rendezvous and approach operations; trajectory optimization; Birkhoff pseudospectral method; convex optimization technique; optimal control theory

0 引言

现阶段,航天任务将高自主性、高可靠性作为未来航天技术发展的重要发展特征^[1]。人造卫星、运载火箭等航天器在重大航天任务中具有不可替代的作用,成为了人类探索空间的主要平台^[2]。因此,航天运输背景下新型航天器将高自主性和高可靠性作为常态化发射的主要着力点^[3-4]。在航天器的总体研发设计中,实时航天轨迹优化和在线重构规划能够及时应对航天中出现的突发情况,在保证有效载荷顺利入轨的同时,尽可能低成本提高航天器可靠性^[5]。在这项任务

中,在轨航天器需要在较强的时间窗口约束下实时生成航天轨迹,在紧急机动时需要完成交会与接近操作(rendezvous and proximity operation, RPO)^[6]。针对目前航天器机载设备计算能力不足的问题,如何能够在极短时间内完成自主规划并寻求最优轨迹就成了任务关键。

航天器轨迹优化本质上是工程中重要的最优控制问题(OCP),有直接法和间接法两种求解策略^[7]。间接法只能得到简单 OCP 的解析解,却很难求解复杂系统;直接法则是通过离散网格点将 OCP 转化为有限维非线性规划问题(nonlinear programming, NLP),进而得到精确解析解。现阶段

作者简介:金帅辰(1998—),男,黑龙江牡丹江人,硕士研究生,研究方向为航天器动力学与控制、航天器机械,mdjjsc1998@163.com。

段 OCP 转录方法的常见代表是伪谱法 (pseudospectral, PS), 包括 DIDO、GPOPS 等优化控制工具包, 其对应的 NLP 问题则可以通过 IPOPT、SNOPT 等算法解决。然而, 在解决复杂问题时容易陷入局部最优, 无法获得解析解^[8-10]。

目前, 在解决复杂空间任务上, 具有多项式时间复杂度的凸优化方法, 已逐步应用于 OCP 的求解中, 将原始 OCP 转化为 2 阶圆锥规划 (second-order conic programming, SOCP) 问题^[11]。同时, 为了提高求解精度, 一方面可以增加离散网格点数量, 但这会增加计算负担; 另一方面采用 0 阶保持 (zeroth order hold, ZOH)^[12]、Chebyshev 谱方法 (chebyshev-gauss-lobatto, CGL)^[13] 和 Radau 谱方法 (legendre-gauss-radau, LGR)^[14] 等 PS 方法。上述方法在解决行星动力着陆的轨迹优化问题具有较好的效果。在航空航天应用中, 更多的网格点能得到较高的计算精度。然而, 一味增加网格点数量会导致 NLP 出现条件病态, 反而不利于问题求解。

考虑到机载设备的计算能力不足和常规 PS 中条件病态的问题, 本研究将凸优化技术和 Birkhoff 谱方法相结合, 创新地提出了一种基于凸优化技术的航天器轨迹快速优化框架。该方法为航天器轨迹的实时重构和快速优化提供了理论参考和技术支持, 对新型航天器故障适应和任务拓展具有重要价值。

1 航天器轨迹优化建模

1.1 二体相对运动方程

在此假设追逐者 (chaser) 绕飞目标者 (target) 的近距离交会场景, 如图 1 所示。在场景中, 建立了以目标者为原点的局部水平局部垂直坐标系 (local vertical and local horizontal, LVLH), 追逐者的速度矢量和位置矢量分别为 $\mathbf{v} = [x, y, z]^T$ 和 $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ 。

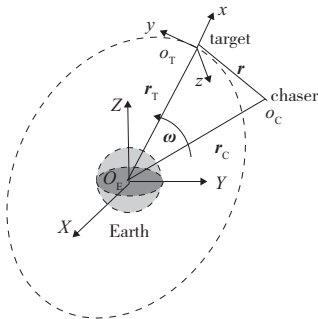


图 1 近距离交会场景

图 1 中也假设了以地球 O_E 为原点的地心赤道惯性坐标系 (GEI)。追逐者和目标者相对于 O_E 的位置矢量分别为 $\mathbf{r}_T$ 和 $\mathbf{r}_C$, 角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}$, 则

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_T + \mathbf{r} \quad (1)$$

对于时间微分两次后得到追逐者的运动方程:

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \ddot{\mathbf{r}}_T + \ddot{\mathbf{r}} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2)$$

式中: $\ddot{\mathbf{r}}_C$ 、 $\ddot{\mathbf{r}}_T$ 和 $\ddot{\mathbf{r}}$ 分别为追逐者惯性加速度、目标者惯性加速度和二者相对加速度; 右侧 3 项分别为科里奥利加速度、切向加速度和向心加速度。

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{r}}, \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}, \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\omega}} (\hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}) \quad (3)$$

式中: $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 分别代表斜对称矩阵; 算子 $[\times]$ 表示向量叉积。

因此二者相对运动特性推导为

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega \dot{y} - 3\omega^2 x = \frac{T_x}{m} \\ \ddot{y} + 2\omega \dot{x} = \frac{T_y}{m} \\ \ddot{z} + \omega^2 z = \frac{T_z}{m} \end{cases} \quad (4)$$

式中: m 为追逐者质量; $T_i (i=x, y, z)$ 为其在 3 个方向上的推力分量。 $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ 的 1 阶系统形式和 $\mathbf{r}$ 的 2 阶系统形式分别为:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \frac{\mathbf{T}}{m} \quad (5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}_1 \mathbf{r} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{T}}{m} \quad (6)$$

式(5)和式(6)中 $\mathbf{0}_{3 \times 3}$ 和 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 分别为零矩阵和单位矩阵, 且:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 3\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 \end{bmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega & 0 \\ -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

1.2 交会轨迹优化

定义交会轨迹优化 (rendezvous trajectory optimization, RTO) 的目标: 追逐者消耗最少燃料以最短时间内接近目标者^[15]。假设初始和终端条件分别为 $[r_0; \nu_0]$ 和 $[r_f; \nu_f]$; $\mathbf{R}$ 为实数集合; $\mathbf{R}^n$ 为 n 维实向量集合; $\mathbf{R}^{n+m}$ 为 $n \times m$ 实矩阵集合; 终端时间 t_f 为常数, 控制变量和状态变量分别为 $\mathbf{T} \in \mathbf{R}^{3 \times 1}$ 和 $[\mathbf{r}, \mathbf{v}, m] \in \mathbf{R}^{7 \times 1}$, RTO 的 OCP 表达^[16] 为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimize } J = \int_0^{t_f} \|T\| dt \\ \text{subject to } \begin{cases} \dot{m} = -\frac{\|T\|}{I_{sp} g_0} \\ \|T\| \leq T_{\max} \\ \|r\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq R_s \\ [r, v, m]^T|_{t=0} = [r_0, v_0, m_0]^T \\ [r, v]^T|_{t=t_f} = [r_f, v_f]^T \end{cases} \end{array} \right. \quad (8)$$

式中: g_0 为重力加速度; I_{sp} 和 $T_{\max}$ 分别为发动机比冲和最大推力; R_s 为二者不会撞击的最小安全距离(禁飞半径); $\|T\|$ 为推力大小; J 为关于时间 t 积分的目标函数。同时, 该问题的最优求解也会因非线性项 $\|T\|$ 、 T/m 和 $\|r\|$ 的存在而更复杂。

1.3 RTO 问题中的凸优化技术

1) 目标函数的等价变换

上述问题在离散后会变为包含 $\|T\|$ 的非线性函数, 因此引入松弛变量 ζ 来替换因子 $\|T\|$ 以获得新的目标函数 J_1 和约束分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimize } J_1 = \int_0^{t_f} \zeta dt \\ \|T\| \leq \zeta, 0 \leq \zeta \leq T_{\max} \end{array} \right. \quad (9)$$

由于 J 到 J_1 的变换是等价的, 则

$$\|T^*(t)\| = \zeta^*(t) \quad (10)$$

2) 动力学约束的变量替换

定义线性中间变量来替换非线性项 T/m :

$$\gamma = \frac{T}{m}; \quad \rho = \ln m; \quad \sigma = \frac{\zeta}{m} \quad (11)$$

用 μ 替代常量 $1/(I_{sp} g_0)$ 以简化动力学方程:

$$\dot{r} = v, \dot{v} = C_1 r + C_2 v + \gamma; \dot{\rho} = -\mu \sigma \quad (12)$$

假设控制变量和状态变量为 $u = [\gamma, \sigma]^T \in \mathbf{R}^{4 \times 1}$ 和 $x = [r, v, \rho]^T \in \mathbf{R}^{7 \times 1}$, 则动力学约束^[17]为

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (13)$$

式中:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ C_1 & C_2 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & -\mu \end{bmatrix} \quad (14)$$

因此:

$$\|\gamma\| \leq \sigma; 0 \leq \sigma \leq T_{\max} e^{-\rho} \quad (15)$$

设定 $\rho = \ln m$, 其下限 ρ_0 为 $\ln(m_0 - \mu T_{\max} t)$, 泰勒 1 阶展开非线性项 $e^{-\rho}$, 以得到线性近似结果:

$$e^{-\rho(t)} \approx e^{-\rho_0(t)} - e^{-\rho_0(t)}(\rho(t) - \rho_0(t)) = e^{-\rho_0(t)}[1 - (\rho(t) - \rho_0(t))] \quad (16)$$

进一步得到:

$$\text{minimize } J_2 = \int_{t_0}^{t_f} \sigma(t) dt, m(t) = m_0 e^{-\mu J_2} \quad (17)$$

其中, 当燃料消耗最优时, 即 J_2 取最小值等价于 $m(t)$ 取最大值。

3) 禁飞约束的连续线性化

在 LVLH 坐标系中定义 NCVX_RTO1 的禁飞约束, 如图 2 所示。追逐者和目标者的距离为 $\|r\|$, 且应满足最小安全距离 R_s 。

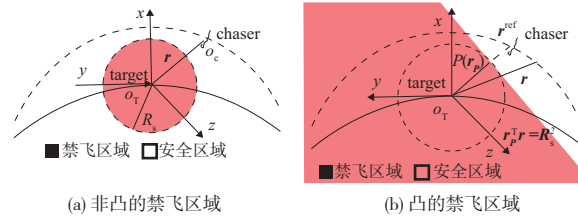


图 2 交会区域

禁飞区域表达如下, 且 $g(r)$ 为位置矢量 r 的映射表达在参考点 r^{ref} 处做 1 阶泰勒展开^[18]:

$$\begin{cases} r^T r \geq R_s^2 \\ g(r) = r^T r \approx g(r^{\text{ref}}) + g'(r^{\text{ref}})(r - r^{\text{ref}}) = (r^{\text{ref}})^T r^{\text{ref}} + 2(r^{\text{ref}})^T (r - r^{\text{ref}}) = 2(r^{\text{ref}})^T r - (r^{\text{ref}})^T r^{\text{ref}} \geq R_s^2 \end{cases} \quad (18)$$

同时, 添加信赖域约束保证偏差范围:

$$\|r - r^{\text{ref}}\| \leq \varepsilon \quad (19)$$

定义图 2(b) 所示的分离超平面, 其中末端点 P 被设置在区域边界:

$$r_p^T r = R_s^2, r_p = \frac{r^{\text{ref}}}{\|r^{\text{ref}}\|} R_s \quad (20)$$

因此, 禁飞约束的线性表达为

$$r_p^T r \geq R_s^2 \quad (21)$$

NCVX_RTO1 被转换为凸问题 CVX_RTO2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimize } J_2 = \int_{t_0}^{t_f} \sigma(t) dt \\ \text{subject to } \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \|\gamma\| \leq \sigma \\ 0 \leq \sigma \leq T_{\max} e^{-\rho_0(t)} [1 - (\rho(t) - \rho_0(t))] \\ r_p^T r \geq R_s^2, \|r - r^{\text{ref}}\| \leq \varepsilon \\ x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f \end{cases} \end{array} \right. \quad (22)$$

CVX_RTO2 可通过 0 阶保持(ZOH)等方法将系统从连续无限维转化为离散有限维, 进一步通过凸优化技术在迭代中不断求解直至获得最优解。因此, 后续引入 Birkhoff 谱方法联合解决

RTO 问题。

2 凸优化问题的 Birkhoff 离散

2.1 RTO 中的 1 阶 Birkhoff 伪谱法 (FBPSM)

将 FBPSM 应用到 GEN_RTO3 以表达 1 阶系统中的状态变量 $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = [x(\tau_0), x'(\tau_1), \dots, x'(\tau_N)]^T \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 7} \quad (23)$$

状态变量 $\mathbf{X}$ 可通过 $\mathbf{P}$ 间接表示:

$$\mathbf{X} = [x_0, x_1, \dots, x_N]^T = \mathbf{B}^1 \mathbf{P} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 7} \quad (24)$$

式中: $\mathbf{B}^1$ 为 1 阶 Birkhoff 谱积分矩阵; $\dot{\mathbf{B}}_k^1(\tau_j)$ 表示关于 τ 的 1 阶导数。

由 $\mathbf{B}^1$ 和 $\dot{\mathbf{B}}_k^1(\tau_j)$ 通过矩阵变换改写动力学约束

$$\mathbf{I}_0^1 \mathbf{P} = \mathbf{F}_0(X_0, U_0), \mathbf{P}_{in} = \mathbf{F}_{in}(X_{in}, U_{in}) \quad (25)$$

式中:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_0^1 = [\dot{\mathbf{B}}_0^1(\tau_0) \quad \dot{\mathbf{B}}_1^1(\tau_0) \quad \dots \quad \dot{\mathbf{B}}_N^1(\tau_0)] \in \mathbf{R}^{1 \times (N+1)} \\ \mathbf{P}_{in} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in \mathbf{R}^{N \times 7} \\ \mathbf{X}_{in} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \in \mathbf{R}^{N \times 7} \\ \mathbf{U}_{in} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T \in \mathbf{R}^{N \times 4} \\ \mathbf{F}(X_{in}, U_{in}) = \kappa [A x_1 + B u_1, A x_1 + B u_1, \dots, \\ A x_1 + B u_1]^T \in \mathbf{R}^{N \times 7} \end{cases} \quad (26)$$

1 阶微分 Birkhoff 伪谱法 (FBPSM) 和 1 阶微分伪谱法 (FDPSM) 的变量规模相同^[19], 因此, 网格 $\tau \in L^N$ 上的问题 GEN_RTO3 由 FBPSM 转换后重新表示:

$$\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 7}, \mathbf{U} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 4}, \tau \in L^N \quad (27)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}^1 \mathbf{P} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 7} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{w}^T \sigma \\ \text{subject to} & \begin{cases} \mathbf{I}_0^1 \mathbf{P}^T = \mathbf{F}_0(X_0, U_0) \\ \mathbf{P}_{in}^T = \mathbf{F}_{in}(X_{in}, U_{in}) \\ G(X(-1), X(1)) = 0 \\ H(X(\tau), U(\tau)) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (29)$$

式中: 边界约束可简化为等式约束 $G(X(-1), X(1)) = \mathbf{0}_{eq}$; 路径约束可简化为不等式约束 $H(X(\tau), U(\tau)) \leq \mathbf{0}_{ineq}$; 零向量 $\mathbf{0}_{eq}$ 和 $\mathbf{0}_{ineq}$ 的维数取决于问题中的等式约束和不等式约束的个数; $\mathbf{U}$ 为控制变量矩阵。

2.2 RTO 中的 2 阶 Birkhoff 伪谱法 (SBPSM)

将 SBPSM 应用到 GEN_RTO3 以表达 2 阶系统中的状态变量 $\mathbf{V}$ 和控制变量 $\mathbf{U}_1$:

$$\begin{cases} \mathbf{V} = [r(\tau_0) \quad r''(\tau_1) \quad \dots \quad r''(\tau_{N-1}) \quad r(\tau_N)]^T \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 3} \\ \mathbf{U}_1 = [\gamma(\tau_0) \quad \gamma(\tau_1) \quad \dots \quad \gamma(\tau_N)]^T \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 3} \end{cases} \quad (30)$$

$\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{D}^{(\lambda)}$ 分别为 1 阶和 λ 阶伪谱微分矩阵, $\mathbf{B}^2$ 为 2 阶 Birkhoff 谱积分矩阵, 通过 $\mathbf{V}$ 间接表示位置变量 $\mathbf{X}_1 \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 3}$ 和速度变量 $\mathbf{X}_2 \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 3}$:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1 = \mathbf{B}^2 \mathbf{V} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 3} \\ \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}'_1 = \mathbf{D} \mathbf{X}_1 = \mathbf{D} \mathbf{B}^2 \mathbf{V} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 3} \\ \dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{D} \mathbf{X}_2 = \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{B}^2 \mathbf{V} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 3} \end{cases} \quad (31)$$

设定 $\tau_i \in L^N, i=0, 1, \dots, N$, 将上式简化为

$$\begin{cases} X_{1i} = X_1(\tau_i) = r(\tau_i) \\ X_{2i} = X_2(\tau_i) = r'(\tau_i) \\ U_{1i} = U_1(\tau_i) = \gamma(\tau_i) \end{cases} \quad (32)$$

因此, 网格 $\tau \in L^N$ 上, 动力学方程 $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}_1 \mathbf{r} + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{r}} + \gamma$ 右侧重新表示为

$$\begin{aligned} f(X_{1i}, X_{2i}, U_{1i}) &= \mathbf{C}_1 X_{1i} + \mathbf{C}_2 X_{2i} + \mathbf{C}_3 U_{1i}, \\ i &= 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (33)$$

同时, 借助 FBPSM 处理关于 ρ 的 1 阶微分方程, 则状态变量 $\mathbf{Z}$ 和控制变量 $\mathbf{U}_2$:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = [\rho(\tau_0) \quad \rho'(\tau_1) \quad \dots \quad \rho'(\tau_N)]^T \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 1} \\ \mathbf{U}_2 = [\sigma(\tau_0) \quad \sigma(\tau_1) \quad \dots \quad \sigma(\tau_N)]^T \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 1} \end{cases} \quad (34)$$

决策变量 ρ 离散化为

$$\begin{cases} \mathbf{X}_3 = \mathbf{B}^1 \mathbf{Z} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 1} \\ \dot{\mathbf{X}}_3 = \mathbf{D} \mathbf{X}_3 = \mathbf{D} \mathbf{B}^1 \mathbf{Z} \end{cases} \quad (35)$$

进一步简化表达:

$$X_{3i} = X_3(\tau_i) = \rho(\tau_i), U_{2i} = U_2(\tau_i) = \sigma(\tau_i) \quad (36)$$

问题 SBPSM_RTO 中状态变量和控制变量的维数降低为 $(N+1) \times 4$, 因此, 网格 $\tau \in L^N$ 上, 使用 SBPSM 后 GEN_RTO3 重新表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{V} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 3}; \mathbf{Z} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 1}; \mathbf{X} = [\mathbf{V} \quad \mathbf{Z}] \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 4}; \\ \mathbf{U}_1 \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 3}; \mathbf{U}_2 \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 1}; \mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \in \\ \mathbf{R}^{(N+1) \times 4}, \tau \in L^N; \\ \mathbf{X}_1 = \mathbf{B}^2 \mathbf{V} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 3}; \mathbf{X}_2 = \mathbf{D} \mathbf{B}^2 \mathbf{V} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 3}; \\ \mathbf{X}_3 = \mathbf{B}^1 \mathbf{Z} \in \mathbf{R}^{(N+1) \times 1} \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \text{minimize} & \mathbf{w}^T \sigma \\ \text{subject to} & \begin{cases} \mathbf{I}_0^2 \mathbf{V} = \mathbf{F}_1(X_{10}, X_{20}, U_{10}) \\ \mathbf{V}_{in} = \mathbf{F}_{1in}(X_{1in}, X_{2in}, U_{1in}) \\ \mathbf{I}_N^2 \mathbf{V} = \mathbf{F}_1(X_{1N}, X_{2N}, U_{1N}) \\ \mathbf{I}_0^1 \mathbf{Z} = \mathbf{F}_2(X_{30}, U_{20}) \\ \mathbf{Z}_{in} = \mathbf{F}_{2in}(X_{3in}, U_{2in}) \\ G(X(-1), X(1)) = 0, H(X(\tau), U(\tau)) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (38)$$

3 RTO 问题的序列凸化算法框架

经过前文离散化后,对一系列凸问题求解以获得最优解 $\{x^*, u^*\}$ 。具体的算法步骤如下所示。

步骤 1: 初始化。设定初始和终端状态分别为 $x_0 = [r_0, v_0]$ 和 $x_f = [r_f, v_f]$, 时间区间为 $[t_0, t_f]$, 追逐者的初始质量为 m_0 。

步骤 2: 忽略禁飞约束。设定初始轨迹 r^0 并作为初次迭代的参考轨迹 r^{ref} 。

步骤 3: 迭代循环。计算当前轨迹 $\{r^k, u^k\}$, 计算最大距离 $\Delta d_{\max} = \|r^k - r^{\text{ref}}\|$, 达到最大迭代次数或满足停止准则时停止。

步骤 4: 计算终端状态误差 e 。

步骤 5: 输出结果。最优性能指标为 J^* , 最优轨迹和最优控制为 $\{x^*, u^*\}$ 。

定义子问题 1 (Subproblem 1): 由于本研究方法在全局层面具有收敛性, 且对初值不敏感, 因此求解开始时取消禁飞约束, 获得初始轨迹。

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbf{R}^7, u^0 \in \mathbf{R}^4, \tau \in [-1, 1] \\ \text{minimize} & J = \kappa \int_{-1}^1 \sigma^0(\tau) d\tau \\ \text{subject to} & \begin{cases} \dot{x}^0(\tau) = \kappa(Ax^0(\tau) + Bu^0(\tau)) \\ \|\gamma^0\| \leq \sigma^0 \\ 0 \leq \sigma^0 \leq T_{\max} e^{-\rho_0(\tau)} [1 - (\rho^0(\tau) - \rho_0(\tau))] \\ x^0(\tau_0) = x_0, x^0(\tau_f) = x_f \end{cases} \end{cases} \quad (39)$$

定义子问题 2 (Subproblem 2): 如步骤 2, 最大迭代次数为 $i_{\text{ter}, \max}$, 添加了全部约束后, 第 k 次迭代的求解为

$$\begin{cases} \text{minimize} & J = \kappa \int_{-1}^1 \sigma^k(\tau) d\tau \\ \text{subject to} & \begin{cases} \dot{x}^k(\tau) = \kappa(Ax^k(\tau) + Bu^k(\tau)) \\ \|\gamma^k\| \leq \sigma^k \\ 0 \leq \sigma^k \leq T_{\max} e^{-\rho_0(\tau)} [1 - (\rho^k(\tau) - \rho_0(\tau))] \\ r_p^T r^k \geq R_s^2 \\ x^k(\tau_0) = x_0, x^k(\tau_f) = x_f \end{cases} \end{cases} \quad (40)$$

式中: $x^k \in \mathbf{R}^7; u^k \in \mathbf{R}^4; \tau \in [-1, 1]$ 。

算法流程如图 3 所示。

4 结果分析

将本研究提出的方法与其他方法进行对比, 包括基于 1 阶微分 Birkhoff 伪谱法 (FBPSM)、基

于 2 阶微分 Birkhoff 伪谱法 (SBPSM)、基于 1 阶微分 Birkhoff 伪谱法 (FDPSM) 和 0 阶保持器 (ZOH)。基于 LVLH 坐标系, 设定表 1 的无量纲单元定义和表 2 的参数设置, 其中地心引力常数 $G_M = 3.986\ 012 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, 重力加速度 $g_0 = 9.807 \text{ m/s}^2$, 地球半径 $R_e = 6\ 378.14 \text{ km}$, 航天器轨道高度 $H_0 = 600 \text{ km}$, 航天器初始质量 $M_0 = 1\ 000 \text{ kg}$ 。

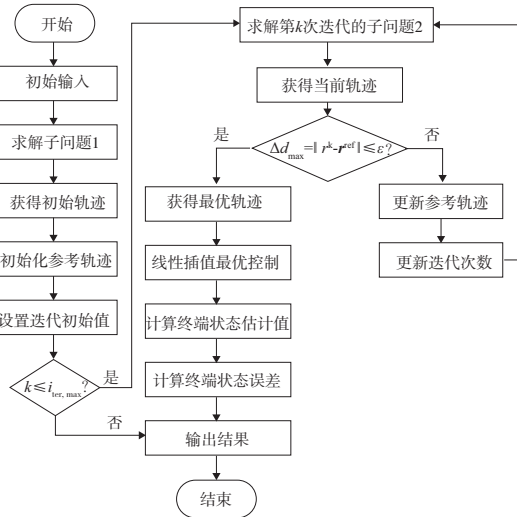


图 3 基于 Birkhoff 谱方法的 RTO 求解

表 1 无量纲单元及取值

无量纲单元	取值
长度 L_u	R_e
速度 V_u	$\sqrt{G_M/R_e}$
时间 T_u	$\sqrt{(R_e)^3/G_M}$
加速度 a_u	$G_M/(R_e)^2$
质量 M_u	M_0
推力 F_u	G_M/R_e^2

表 2 初始化参数设置

初始化参数	取值
初始质量	$m_0 = 1\ 000/M_u$
初始和终端时间	$t_0 = 0, t_f = 500/T_u$
初始和终端位置	$r_0 = [0, -100, 0]/L_u; r_f = [0, 20, 0]/L_u$
初始和终端速度	$v_0 = [0, 0, 0]/V_u; v_f = [0, 0, 0]/V_u$
禁飞区域半径	$R_s = 10/L_u$ (球形) $R_y = 15/L_u; R_z = 10/L_u$ (椭圆)
推力大小区间	$[T_{\min} \quad T_{\max}] = [0 \quad 10/F_u]$
有效喷气速度倒数因子	$\mu = V_u/2\ 000$

4.1 不同网格点下的计算效率测试

以网格点数量为自变量, 对不同方法的参数指标和计算结果进行对比分析, 包括计算效率和

求解精度。设置7组实验,每组分别为30、60、90、120、150、180和210个网格点。以最优解的求解总时间来评价计算效率:

$$T_{\text{total}} = (T_{\text{model}}^0 + T_{\text{solver}}^0) + \sum_{k=1}^{S_{\text{iter}}} (T_{\text{model}}^k + T_{\text{solver}}^k) + T_{\text{other}} \quad (41)$$

式中: $(T_{\text{model}}^0 + T_{\text{solver}}^0)$ 表示子问题1的建模时间和求解时间;中间项表示子问题2的建模时间和求解时间; T_{other} 表示其余环节的总时间。因此,不同方法在不同网格点数量 N 下的总时间 T_{total} 、位置误差 e 和解的最优性评价 J_{obj} 的结果如表3所示。

表3 不同方法在不同网格点数量下统计结果

N	0 阶保持器(ZOH)			基于1阶微分 Birkhoff 伪谱法(FDPSM)			基于1阶微分 Birkhoff 伪谱法(FBPSM)			基于2阶微分 Birkhoff 伪谱法(SBPSM)		
	$T_{\text{total}}/\text{s}$	e/m	J_{obj}/kg	$T_{\text{total}}/\text{s}$	e/m	J_{obj}/kg	$T_{\text{total}}/\text{s}$	e/m	J_{obj}/kg	$T_{\text{total}}/\text{s}$	e/m	J_{obj}/kg
30	20.085	41.685	0.571	5.511	0.305	0.569	5.160	0.305	0.569	5.068	0.305	0.569
60	25.626	20.802	0.570	9.043	0.338	0.570	9.981	0.338	0.570	8.580	0.338	0.570
90	32.404	13.800	0.569	10.702	0.182	0.570	10.939	0.182	0.570	10.733	0.182	0.570
120	42.045	10.339	0.567	19.539	0.103	0.570	17.706	0.103	0.570	18.571	0.103	0.570
150	52.870	8.283	0.569	66.033	0.135	0.568	25.060	0.002	0.569	21.609	0.002	0.569
180	63.479	7.024	0.567	78.733	0.035	0.569	27.656	0.022	0.569	24.493	0.022	0.569
210	73.037	5.916	0.569	97.448	0.336	0.567	36.833	0.035	0.569	30.066	0.035	0.569

图4给出了 $N=30$ 和 $N=120$ 时,追逐者推力分量和推力大小的变化曲线。分析图4可知,推力大小和松弛变量的变化趋势基本相同。这说明松弛问题的求解和原始问题等价,也证明了无损凸化是可靠的。同时,图4表明推力变化主要体现在 x 方向和 y 方向,符合航天器在 xOy 平面上以燃料消耗最小实现机动转移的特点。除此之外,当网格点数量较少时,推力变化缓慢且平稳,发动机耗时为80s左右;当网格点数量较多时,航天器反应迅速,发动机耗时只有15s左右。因此,可以尽量增加网格点数量以保证约束问题得到更准确的最优解,FBPSM和SBPSM能够在较短时间内均保证较高的求解效率,同时也保证较高求解精度。

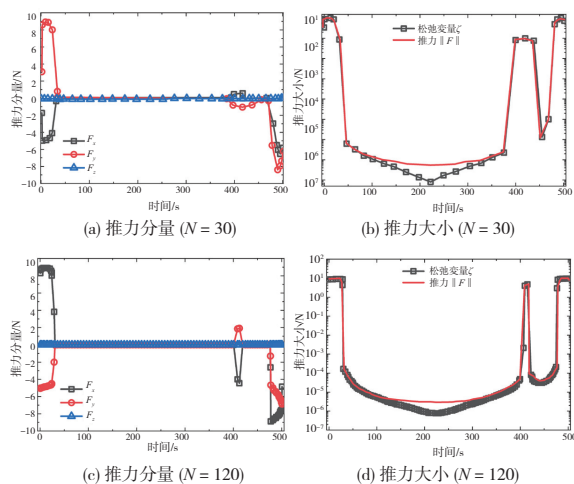
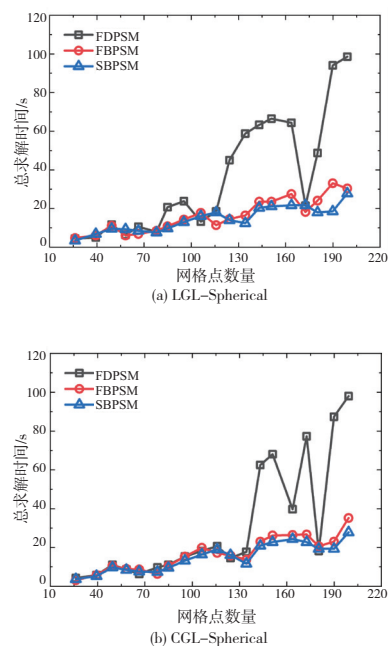


图4 禁飞区域推力分量和大小的变化曲线

4.2 不同条件下的灵敏度分析

进一步通过求解时间和迭代次数对不同方法进行灵敏度测试,主要涉及网格点类型(LGL和CGL)和禁飞区域形状(球形 Spherical 和椭球形 Ellipsoid)。在 y 轴方向的初始位置添加扰动以进行蒙特卡罗分析,评估不同方法在初始状态受到扰动时的灵敏度特性, $N=90$ 和 $N=150$ 扰动范围为 $[-1,1]$ 。图5为在不同网格点类型和不同禁飞区域形状下的总耗时对比,图6为在不同网格点类型和不同禁飞区域形状下的迭代次数对比。



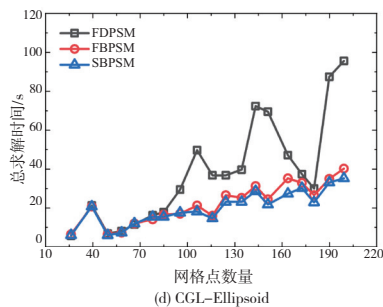
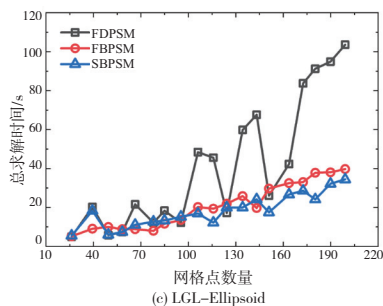


图5 不同网格点类型和禁飞区域形状下总求解时间的变化曲线

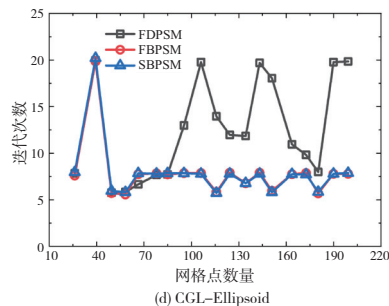
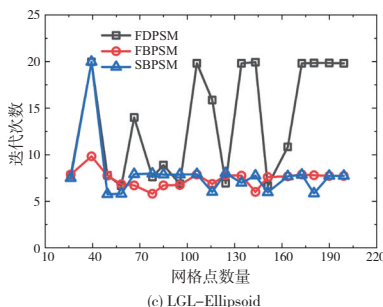
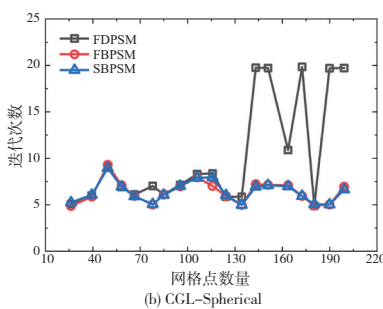
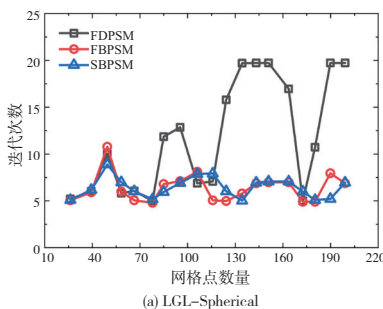


图6 不同网格点类型和禁飞区域形状下迭代次数的变化曲线

分析图5可知,本文研究方法(FBPSM和SBPSM)在求解时间上具有比FDPSM更高的计算优势。究其原因,当网格点数量较多时($N \geq 100$),FDPSM变现出急剧增长的平方增长趋势,而FBPSM和SBPSM却始终保持着变化平稳的线性增长趋势,且SBPSM的性能优于FBPSM。分析图6可知,FBPSM和SBPSM可以将迭代次数控制在5~8次即可求得最优解,且当网格点数量较多时,二者求解速度和精度更优。

综上,本文研究方法(FBPSM和SBPSM)在以下方面具有比FDPSM更大的优势:1)FBPSM和SBPSM的最优解求解时间短且过程稳定,同时适应于网格点类型不同和禁飞区域不规则的情况;2)当初始位置受到扰动时,FBPSM和SBPSM同样能保证较高的计算效率和求解精度;3)当条件相同时,SBPSM的鲁棒性优于FBPSM。

5 结语

提高航天器快速入轨和任务拓展对于节约人力、物力成本具有重要意义。本研究将凸优化技术和Birkhoff谱方法相结合,创新地应用在航天器RPO任务中提出了一种基于凸优化技术的航天器轨迹快速优化框架。针对RPO任务,这项研究建立了二体相对运动的动力学模型,引入最优控制理论并采用凸优化技术处理了RPO任务中的非线性约束,制定了1阶Birkhoff伪谱法(FBPSM)和2阶Birkhoff伪谱法(SBPSM)处理动力学约束的理论框架。该方法为航天器轨迹的实时重构和快速优化提供了理论和技术支持,对新型航天器的故障适应和任务拓展具有重要价值。

(下转第151页)

- 36(1):87-95.
- [15] 张丹,齐炜胤,邵华. 4RRR 冗余并联机械手的动力学分析与优化[J]. 机械设计与研究,2024,40(5):187-192.
- [16] 徐璐. 工业产品智能包装封口机械二级臂抗振方法[J]. 机械设计与制造,2025(3):5-10.
- [17] 陈洪月,蔡明航,杨辛未,等. 更换电铲钢丝绳专用机械臂架的结构及动力学分析[J]. 工程设计学报,2023,30(5):590-600.
- [18] 卢燕会,任燕,卢东亮,等. 平面并联五连杆机构的改进 PSO-SVR 可靠性分析[J]. 机械设计与制造,2025(2):179-182.
- [19] 郭家乐,常宗瑜,何静文,等. 基于等效机械模型的液舱-运动模拟平台系统动力学分析[J]. 机械设计,2024,41(6):7-13.
- [20] 周健,万烂军,罗海霞. 基于域泛化的旋转机械故障诊断方法[J]. 组合机床与自动化加工技术,2025(1):127-131,137.

收稿日期:2023-11-08

(上接第 138 页)

参考文献:

- [1] 梅迪,朱迪,朱开鼎,等. 航天器低成本高效率运输方案探究[J]. 军民两用技术与产品,2024(4):33-38.
- [2] 范丽,胡泽阳,武丹,等. 基于光纤传感航天器神经网络与数字孪生研究[J]. 仪表技术与传感器,2024(5):12-18.
- [3] 李刚,周尚波,郭尚志,等. 通信延迟下自适应容错控制及其在航天器编队中的应用[J]. 重庆大学学报,2024,47(4):104-113.
- [4] 潘星熠,陈提. 基于 Vicsek 分形结构的智能航天器集群在轨组装动力学与控制[J]. 动力学与控制学报,2024,22(3):34-42.
- [5] 王璟贤,白玉铸,陈致钧,等. 基于测地线的航天器集群隐蔽机动轨迹规划[J]. 宇航学报,2024,45(4):513-522.
- [6] 杜荣华,张翔,王宁,等. 非合作目标交会接近的自主检测和跟踪方法研究[J]. 宇航学报,2021,42(5):621-633.
- [7] 何林坤,薛文超,张冉,等. 运载火箭动力着陆段制导控制方法综述与展望[J]. 航空学报,2023,44(23):58-83,3.
- [8] 诸葛运成,任飞,李安庆,等. 一种用于连续推力航天器燃料最优轨迹优化的协状态初始化方法[J]. 齐鲁工业大学学报,2023,37(5):19-27.
- [9] 乔衍迪,张泽旭. 基于双层凸优化模型的月面运载器大范围转移最优轨迹规划方法[J]. 深空探测学报(中英文),2023,10(5):470-480.
- [10] 谢尔盖·伊斯科夫,格里果利·菲利波夫,周晓,等. 帕累托-有限推力航天器轨道机动问题中相对运动的最优控制[J]. 西北工业大学学报,2023,41(3):529-536.
- [11] 任飞,田晨璐,张桂青,等. 基于 2 阶圆锥规划的大规模电动汽车充电调度优化研究[J]. 计算机时代,2022(9):100-104.
- [12] 张显库,洪皓辰. 基于非线性修饰和零阶保持器的船舶航向保持控制[J]. 中国舰船研究,2024,19(1):84-89.
- [13] 刘涛,王青山,秦斌,等. 矩形板自由振动的 Chebyshev 谱方法[J]. 塑性工程学报,2021,28(5):145-152.
- [14] 黄洁,张友安,刘永新,等. 基于 Radau 伪谱方法的轨迹优化[J]. 海军航空工程学院学报,2015,30(4):315-320.
- [15] 陈诗雨,宝音贺西. 多目标交会轨迹优化方法综述[J]. 动力学与控制学报,2022,20(4):1-11.
- [16] 王访寒,周如好,余薛浩,等. 基于序列凸优化的上级远程交会轨迹优化[J]. 上海航天(中英文),2022,39(2):45-52.
- [17] 房炫伯,孙鑫,殷国梁. 基于凸优化的 OFDM 信号峰均比抑制算法[J]. 自动化与仪器仪表,2022(8):118-121.
- [18] 田霖,苏智杰,冯婉媚,等. 面向多无人机携能网络的轨迹与资源规划算法[J]. 西安电子科技大学学报,2021,48(6):115-122.
- [19] 曾益东,黄俊,陈波,等. 基于伯克霍夫预处理的良态伪谱法[J]. 控制工程,2023,30(7):1324-1331,1367.

收稿日期:2024-10-08