

DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2025.06.038

基于旋量建立机器人雅克比矩阵的改进方法研究

李伟¹, 王晖¹, 梁辉²

(1. 青岛职业技术学院 海尔学院(机电学院), 山东 青岛 266555;

2. 青岛科技大学 机电工程学院, 山东 青岛 266061)

摘 要: 机器人速度雅克比矩阵是机器人关节空间速度向笛卡儿空间速度的映射矩阵。应用旋量理论求得机器人速度雅克比矩阵是一种常用的方法, 但传统方法是将固定参考坐标系作为旋量的描述坐标系, 得到的结果是关节速度到机器人固定参考坐标系原点速度的映射。针对这一问题, 提出一种改进方法, 即在机器人末端执行器参考点建立与固定参考坐标系姿态一致的旋量描述坐标系, 并在该描述坐标系内建立机器人的速度雅克比矩阵。以 n 个刚体用转动副串联组成的串联机构为例, 分别在固定参考坐标系与旋量描述坐标系下描述旋量, 证明在旋量坐标系下描述旋量能够直接得到机器人末端执行器参考点的速度到关节速度映射的速度雅克比矩阵。分别用传统方法与改进方法分析平面 2R 机器人末端参考点的速度, 通过对比, 验证了改进方法的正确性、简洁性及直观性。

关键词: 旋量理论; 速度雅克比矩阵; 旋量描述坐标系; 平面 2R 机器人; 改进方法

中图分类号: TH112; TP242 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5276(2025)06-0207-07

Research on Improved Method for Establishing Robot Jacobian Matrix Based on Screw Theory

LI Wei¹, WANG Hui¹, LIANG Hui²

(1. Haier School (Electromechanical School), Qingdao Technical College, Qingdao 266555, China;

2. College of Electromechanical Engineering, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China)

Abstract: The robot velocity Jacobian matrix is the mapping matrix of robot joint space velocity to Cartesian space velocity, and application of screw theory to obtain the robot velocity Jacobian matrix is a commonly practice, but due to that the description coordinate system is the fixed reference coordinate system of the robot by traditional way, the result yeided is the mapping of the joint velocity to the velocity from the origin of the robot's fixed reference coordinate system. To solve the problem, an improved method is proposed to establish a screw description coordinate system at the reference point of the robot's end effector consistent with the fixed reference coordinate system, and build the robot's velocity Jacobian matrix within this description coordinate system. A series mechanism composed of n rigid bodies in series with rotating pairs taken as an example, screws is described in fixed reference coordinate system and screw description coordinate system to demonstrate that describing screws in screw description coordinate system can directly obtain the velocity Jacobian matrix of the robot end effector reference point to joint velocity mapping. The velocity of the reference point at the end of the planar 2R robot is analyzed using traditional and improved methods. The comparison made verifies the correctness, conciseness, and intuitiveness of the improved method.

Keywords: screw theory; velocity jacobian matrix; screw description coordinate system; 2R planar robot; improved method

0 引言

机器人理论研究的一个重要工作就是建立其速度雅克比矩阵。它是机器人关节空间驱动速度到末端执行器输出速度的映射矩阵, 反映了机器

人的结构参数特征和瞬时位形特征, 深刻地反映着机器人机构的本质特征^[1]。

求解机器人速度雅克比矩阵最基础的方法是基于位置方程的求导法, 韩旭焰等^[2]针对一种 2P3RR 并联机构建立了位置正、逆解公式, 通过

基金项目: 山东省高等学校青创科技支持计划(2024KJH118); 山东省职业教育研究课题项目(24SVE092; 24SVE093); 青岛职业技术学院重点研发专项(2021ZDYF01); 青岛职业技术学院重点科研课题(2020YYZD03)

第一作者简介: 李伟(1989—), 男, 湖北孝感人, 讲师, 硕士研究生, 研究方向为工业机器人技术、机器人机构学及应用。发表论文 7 篇, 授权发明专利 2 项, 实用新型专利 10 项。主编教材 1 部, 参与山东省高等学校科技计划项目 2 项(排名第二), 主持校级重点研发专项 1 项, 校级重点研究课题 1 项。作为主要参与人, 获得 2018 年山东省高等学校科学技术奖一等奖(排名第二), liw@ qtc.edu.cn。

位置方程求导求解了该机构的雅克比矩阵,并在此基础上对该机构进行了灵巧性分析。刘毅等^[3]提出一种 8 自由度混联调姿机器人舱内装配系统,采用微分变换法对串联部分雅克比矩阵进行了求解。尤晶晶等^[4]利用位置方程求导法、环路方程法推导了 Stewart 并联机构 3 类形式的雅克比矩阵,并推导了各雅克比矩阵行列式之间的关联。王芮雪等^[5]提出一种以 3-UPS/PPR 并联机构为核心的推拿机器人,通过对运动学逆解方程组求导得到该机器人的速度雅克比矩阵,并进行了运动学分析。罗自荣等^[6]提出了一种 2-(U+UPS)PU+UPU 串并混联 3 自由度平动机器人腿机构,通过对位置方程求偏导,推导出平动机器人腿的速度雅克比矩阵。

上述文献均基于位置方程求导得到机器人的速度雅克比矩阵,但计算过程复杂。旋量既可以用来表示刚体的速度,也可以表示刚体受到的力^[7-8],是机器人理论研究强有力的现代化数学工具。采用旋量法求解机器人雅克比矩阵可以省去繁琐的求导过程^[9-11]。文献[12-15]利用旋量理论来求得具有 n 个关节的串联机器人的速度雅克比矩阵。该方法是以机器人固定坐标系为参考,利用旋量与指数积公式得到瞬时位形下机器人的所有关节旋量,再以该瞬时位形下的一组关节旋量构成的 $6 \times n$ 阶矩阵作为机器人的速度雅克比矩阵,该矩阵是机器人关节空间驱动速度到末端执行器上与固定参考坐标系坐标原点重合点的速度映射关系,并不是真实的机器人末端执行器参考点到关节速度的映射关系,需要进一步转换才能得到末端执行器参考点的速度,在实际分析中显得不够直观与简洁。

文献[16]基于旋量理论与矢量积法求得机器人的速度雅克比矩阵,虽然得到了关节驱动速度到参考点速度的映射关系,但旋量的作用是结合指数积公式得到瞬时位形下机器人所有关节运动旋量,其解决问题本质还是用的矢量积法。文献[17]在介绍串联机器人机构的运动反解求解方法时,提出将坐标系原点建立在末端执行器的参考点,来得到关节空间驱动速度到机器人末端执行器参考点的速度映射关系,但未明确提出这个坐标系的姿态需要与固定参考坐标系保持姿态一致,也未给出详细的证明过程。

本文以旋量为工具,提出的改进方法能够直接得到机器人关节空间驱动速度到机器人末端执行器参考点速度的映射,能够直接得到末端参考

点的速度,无需任何转换环节。以平面 2R 机器人为例,分别用传统方法和改进方法分析了其末端参考点的速度。通过比较,证明了改进方法的正确性、简洁性及直观性。

1 旋量基础

线矢量由姿态向量 s 以及通过其轴线上的一点 r 来确定,如图 1 所示。线矢量由主部 s 和副部 $r \times s$ 构成。 s 为单位向量,表示了轴线的方向, r 确定了轴线的位置。线矢量用 6 维的 Plücker 坐标表示为

$$\mathcal{S} = (s; r \times s) = \begin{bmatrix} s \\ r \times s \end{bmatrix} \quad (1)$$

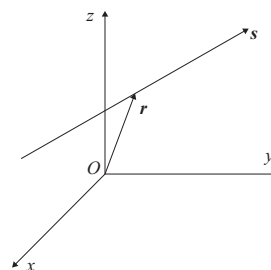


图 1 线矢量示意图

旋量是带有节距要素 h ($h \neq 0$) 的线矢量,刚体绕某条轴线的瞬时转动和沿某条轴线的瞬时移动都可以用旋量表示。因此,刚体绕着某一条轴线的瞬时运动可以用旋量表示为:

$$T = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} s \\ r \times s + hs \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$T = \begin{bmatrix} \theta \\ v \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(2)表示刚体绕轴线的瞬时转动,式中 $\dot{\theta}$ 表示瞬时转动速率, h 表示旋量节距。当式(2)表示由转动关节引起的旋转运动时, $h=0$,旋量退化为线矢量。式(3)表示刚体沿着轴线做瞬时移动时的速度旋量,此时, $h=\infty$,式(3)中 p 表示瞬时移动速率。

2 旋量描述坐标系

图 2 是刚体旋量运动示意图。 s 表示刚体瞬时转动的轴线方向向量, r_0 表示坐标原点到 s 所在直线的垂直向量; ω 表示刚体的瞬时转动角速度; h 表示旋量节距; P 点表示刚体上的一个点; P_0 表示 P 点到 s 所在直线的垂直向量; v_p 是刚体上 P 点的瞬时线速度。

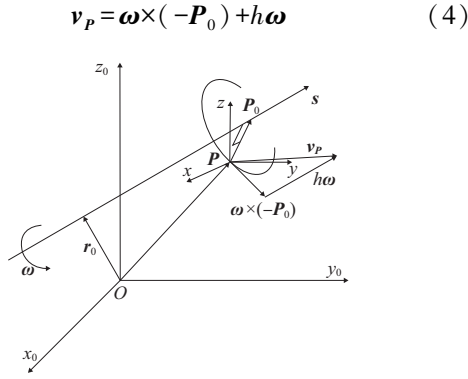


图2 刚体旋量运动示意图

按照旋量的定义,图2所示刚体的瞬时速度表示为

$$V = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} s \\ r \times s + hs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ r_0 \times \omega + h\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \omega \times (-r_0) + h\omega \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中 v 表示刚体上与参考坐标系原点重合的点的瞬时线速度。式(5)表示刚体上与坐标原点重合的点的瞬时角速度和瞬时线速度。对于单个刚体,体现其瞬时运动的物理意义很明显,但如果是若干旋量的合成旋量,例如串联机器人的若干关节旋量合成末端执行器的运动,式(5)体现机器人的瞬时运动的物理意义则不明显,因为其副部体现的是末端执行器上与参考坐标系原点重合点的线速度,而没有直接体现末端执行器参考点的线速度,因此对于速度映射关系不够直观、简洁。

为了解决上述问题,在 P 点建立一个旋量描述坐标系 $P-xyz$,即建立一个与参考坐标系姿态一致的坐标系。即

$${}^0_P T = \begin{bmatrix} E & {}^0P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中: E 为单位矩阵; ${}^0P$ 为 P 点在参考坐标系下的向量。

在这个坐标系下描述旋量,按照旋量的定义:

$$V = \dot{\theta} \begin{bmatrix} s \\ P_0 \times s + hs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ P_0 \times \omega + h\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \omega \times (-P_0) + h\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ v_P \end{bmatrix} \quad (7)$$

旋量在不同的坐标系里进行表达,旋量节距 h 不会发生变化。由于旋量描述坐标系 $P-xyz$ 与参考坐标系 $O-x_0y_0z_0$ 姿态一致,旋量的方向 s 和 P 点到 s 所在直线的垂直向量 P_0 在这两个坐标系里是相等的,这时候旋量表示的即为 P 点在参

考坐标系 $O-x_0y_0z_0$ 下的瞬时运动速度。

因此,对于任意确定的瞬时刚体的运动,要求得上任意一点的速度,只需要在这个点上建立一个与参考坐标系姿态一致的旋量描述坐标系,在该坐标系下描述旋量,用式(7)就可以求得其瞬时速度。

3 应用旋量理论求机器人速度雅克比矩阵的改进方法

3.1 应用传统方法求机器人速度雅克比矩阵

图3所示是 n 个刚体用转动副串联所得到的串联机构。 $\$i (i=1,2,\dots,n)$ 表示第 i 个转动关节旋转轴线的单位旋量,其节距 h 为 0,此时旋量退化为线矢量; s_i 为单位向量,表示转动轴线的方向; r_i 表示轴线的位向量; $\dot{\theta}_i (i=1,2,\dots,n)$ 表示第 i 个转动关节瞬时转动速度。因此第 i 个转动副相对于参考坐标系的瞬时速度 T_i 表示如下:

$$T_i = \dot{\theta}_i \$i = \dot{\theta}_i \begin{bmatrix} s_i \\ r_i \times s_i \end{bmatrix}, \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (8)$$

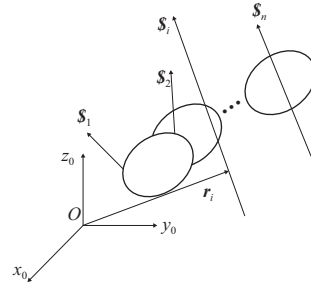


图3 几个刚体用转动副串联

如图4所示, n 个刚体串联后,产生的合成运动 T 为一个速度合旋量,按照旋量的加法运算法则:

$$T = \dot{\theta}_A \begin{bmatrix} s_A \\ r_A \times s_A + hs_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \omega \times (-r_A) + h\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n T_i = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i \$i \\ \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i (r_i \times s_i) \end{bmatrix} = (\$1 \ \$2 \ \dots \ \$n) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: s_A 表示 n 个刚体串联后,在所有转动副运动下所形成的合成速度旋量 T 所在轴线的方向矢量; r_A 表示 T 所在轴线的位向量,是参考坐标系原点到轴线上任意一点的向量; h 表示合成运动旋量 T 的节距; $\omega = \dot{\theta}_A s_A$ 表示合成运动的角速度;

ω_o 表示机器人末端执行器与参考坐标系原点重合点的角速度; v_o 表示机器人末端执行器与参考坐标系原点重合点的线速度。

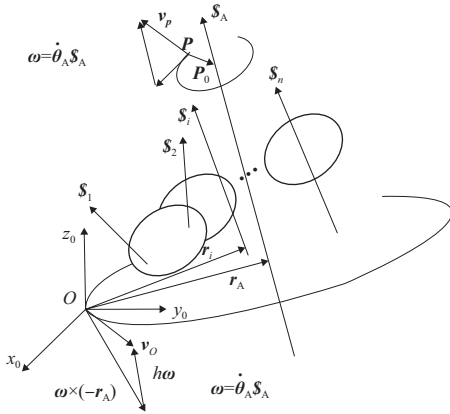


图4 几个刚体串联产生的速度合旋量示意图

式(9)中,如果直接将 $(s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n)$ 作为机器人机构的速度雅克比矩阵不够严谨和直观,因为它不能直接体现机器人关节驱动速度到机器人末端执行器参考点速度的映射关系,合旋量 T 的副部 $\dot{\theta}_A(r_A \times s_A + h s_A) = \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i(r_i \times s_i) = \omega \times (-r_A) + h\omega$ 反映的是机器人末端执行器上与参考坐标系原点重合点的速度 v_o ,并不是机器人末端执行器上工具坐标系原点(参考点)的速度。式(9)体现机器人的瞬时运动的物理意义则不明显,不能直观反映速度映射关系。图4中,假设 P 点就是机器人末端执行器的参考点,如果要得到 P 点的线速度 v_p ,还需进一步用式(10)或式(11)得到:

$$v_p = \omega \times (-P_0) + h\omega, \quad \omega = \dot{\theta}_A s_A \quad (10)$$

$$v_p = v_o + \omega \times P, \quad \omega = \dot{\theta}_A s_A \quad (11)$$

但也不难看出,关节越多,节距 h 和 P_0 就越难求,用式(10)或式(11)求出结果的难度也越大。

3.2 应用旋量的改进方法求机器人的速度雅克比矩阵

实际上,我们希望直接得到机器人关节空间驱动速度到机器人参考点速度的映射关系。如图5所示,假设 P 点为末端执行器的参考点,在 P 点建立一个与参考坐标系姿态一致的旋量描述坐标系 $P-xyz$ 。则 n 个刚体串联后,在所有转动副运动下所形成的合成运动旋量 ${}^P T$ 表示如下:

$${}^P T = \dot{\theta}_A {}^P s_A = \dot{\theta}_A \begin{bmatrix} {}^P s_A \\ {}^P P_A \times s_A + h s_A \end{bmatrix} = \dot{\theta}_A \begin{bmatrix} s_A \\ P_0 \times s_A + h s_A \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中: ${}^P s_A$ 表示合成运动旋量 T 所在轴线的方向矢量在坐标系 $P-xyz$ 下的描述; ${}^P P_0, P_0$ 表示 P 点到合旋量 T 轴线的垂直向量分别在旋量描述坐标系 $P-xyz$ 和参考坐标系下的描述; h 为合成旋量 T 的旋距。

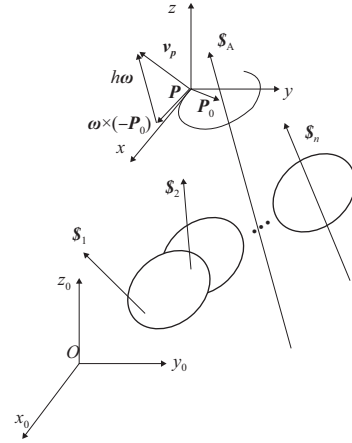


图5 在参考点建立旋量描述坐标系 $P-xyz$

因为坐标系 $P-xyz$ 与参考坐标系姿态一致,因此, ${}^P s_A = s_A, {}^P P_0 = P_0, s_A$ 是合成运动旋量 T 所在轴线的方向矢量在参考坐标系下的描述。

比较式(10)和式(12)的副部,可以发现:

$$\dot{\theta}_A(P_0 \times s_A + h s_A) = \omega \times (-P_0) + h\omega = v_p, \quad \omega = \dot{\theta}_A s_A \quad (13)$$

合旋量在坐标系 $P-xyz$ 下描述得到 ${}^P T$,其副部正是参考点 P 点的线速度。 ${}^P T$ 的主部是合成旋量的瞬时转动速度 ω 。因此在坐标系 $P-xyz$ 下描述合旋量,正好描述了 P 点在参考坐标系下的瞬时角速度 ω_p 和瞬时线速度 v_p 。进一步把式(13)写成各转动关节旋量相加的形式可得式(14)。

$${}^P T = \dot{\theta}_A {}^P s_A = \dot{\theta}_A \begin{bmatrix} s_A \\ P_0 \times s_A + h s_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_p \\ v_p \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n {}^P T_i = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i {}^P s_i \\ \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i ({}^P r_i \times s_i) \end{bmatrix} = ({}^P s_1 \ {}^P s_2 \ \dots \ {}^P s_n) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中 $({}^P s_1 \ {}^P s_2 \ \dots \ {}^P s_n)$ 则为 n 个刚体用转动关节串联后所形成的,在参考坐标系下的机器人的速度雅克比矩阵,它是一组在参考点建立的与参考坐标系姿态一致的旋量描述坐标系下描述的关节旋量,可直接体现机器人关节空间驱动速度

到机器人参考点速度的映射关系,即是本文所关心的结果,也无需求解合旋量的节距 h 和垂直向量 P_0 ,无需任何转换环节。

3.3 改进方法下旋量体现的物理意义

式(14)中的每一个相加项 ${}^P T_i = \dot{\theta}_i {}^P \mathcal{S}_i = \dot{\theta}_i \begin{bmatrix} s_i \\ {}^P r_i \times s_i \end{bmatrix}$ 的物理意义是该转动关节作用下在机器人末端参考点产生的速度。如图6所示,式(14)实际上是机器人在某一具体位形下,各关节在参考点处产生的瞬时速度叠加。

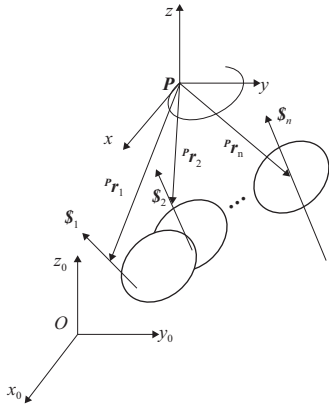


图6 各关节旋量运动在参考点叠加

4 用传统方法与改进方法求平面 2R 机器人的速度雅克比矩阵的结果对比

平面 2R 机器人是一种典型的串联机器人机构,由两个旋转关节连接 2 个连杆组成,其机构简图如图7所示。很多机器人学教科书中都将它作为典型例子来展示机器人的速度雅克比矩阵的求解方法。

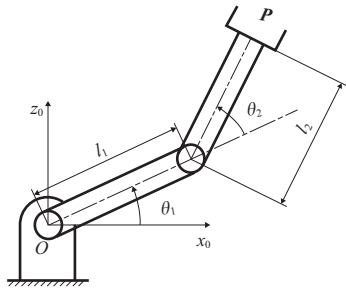


图7 平面 2R 机器人机构简图

首先直接给出正确的机器人末端参考点的速度与关节驱动速度之间的映射关系。需要注意的是,这里直接给出的是末端参考点的线速度与关节驱动速度的关系。

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s \theta_1 - l_2 s \theta_{12} & -l_2 s \theta_{12} \\ l_1 c \theta_1 + l_2 c \theta_{12} & l_2 c \theta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中: $s\theta_1 = \sin\theta_1$; $s\theta_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$; $c\theta_1 = \cos\theta_1$; $c\theta_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ 。实际上,末端参考点还有姿态信息的变化,将姿态信息考虑进去,给出末端参考点速度到关节速度的映射关系为

$$\begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -l_1 s \theta_1 - l_2 s \theta_{12} & -l_2 s \theta_{12} \\ l_1 c \theta_1 + l_2 c \theta_{12} & l_2 c \theta_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

4.1 运用传统方法求得平面 2R 机器人速度雅克比矩阵

在参考坐标系 $O-x_0y_0z_0$ 下描述两个关节旋量:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \begin{bmatrix} s_1 \\ r_1 \times s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0 & 0 & 1)^T \\ (0 & 0 & 0)^T \end{bmatrix} \\ s_1 &= (0 & 0 & 1)^T \\ r_1 &= (0 & 0 & 0)^T \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \begin{bmatrix} s_2 \\ r_2 \times s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0 & 0 & 1)^T \\ (l_1 s \theta_1 & -l_1 c \theta_1 & 0)^T \end{bmatrix} \\ s_2 &= (0 & 0 & 1)^T \\ r_2 &= [l_1 c \theta_1 & l_1 s \theta_1 & 0]^T \end{aligned} \quad (18)$$

末端执行器的速度描述为

$$T = \dot{\theta}_1 \mathcal{S}_1 + \dot{\theta}_2 \mathcal{S}_2 = [\mathcal{S}_1 \quad \mathcal{S}_2] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

按照传统方法,求得的平面 2R 机器人在固定参考坐标系 $O-x_0y_0z_0$ 下的雅克比矩阵为

$$J^0 = (\mathcal{S}_1 \quad \mathcal{S}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & l_1 s \theta_1 \\ 0 & -l_1 c \theta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

很显然,对比式(15),这个结果是不一致的,实际上,按照传统方法,机器人末端执行器的速度是机器人各关节旋量的合成运动旋量,为了求出参考点的速度,需要求出合旋量轴线在参考坐标系 $O-x_0y_0z_0$ 下的方向和位置,再按照图2方法求出末端执行器参考点的速度。

按照旋量的加法法则:

$$T = \dot{\theta}_1 \mathcal{S}_1 + \dot{\theta}_2 \mathcal{S}_2 = \mathcal{S} = \begin{bmatrix} s \\ s_0 \end{bmatrix} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\dot{\theta}_2 l_1 s \theta_1}{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2} \\ \frac{\dot{\theta}_2 l_1 c \theta_1}{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

上文求出了平面 2R 机器人的合旋量,合旋量示意图如图 8 所示,这时可以根据图 2 所示方法求出机器人末端执行器上任一点在机器人该瞬时位形下的速度。

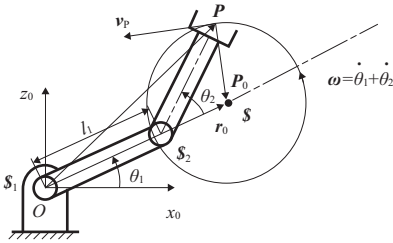


图 8 平面 2R 机器人合旋量示意图

其次研究如何在参考坐标系来描述这个旋量以及求机器人末端参考点 P 点的速度。

针对这个旋量,要求出坐标原点 O 垂直于旋量轴线的正交位置向量 r_0 以及旋量节距 h 。

节距 h 由以下公式求得:

$$h = \frac{s \cdot s_0}{s \cdot s} = 0 \quad (22)$$

由此可见,这两个旋转关节的运动旋量合成后的合旋量仍然是线矢量。现在来计算合旋量的正交矢量 r_0 。

$$\left\{ \begin{aligned} r_0 &= \frac{s \times s_0}{s \cdot s} = \frac{l_1}{\frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2} + 1} [c\theta_1 \quad s\theta_1 \quad 0]^T \\ s &= [0 \quad 0 \quad 1]^T \\ s_0 &= \begin{bmatrix} \frac{\dot{\theta}_2 l_1 s \theta_1}{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2} & \frac{\dot{\theta}_2 l_1 c \theta_1}{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2} & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \right. \quad (23)$$

由上式可知,合旋量的轴线平行于 z 轴,且正交于平面 2R 机器人的第 1 个连杆所在杆长方向,如图 8 所示。

于是:

$$\left\{ \begin{aligned} v_P &= \omega \times (-P_0) + h\omega = (r_0 - P) \times \omega = \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 s \theta_1 - l_2 s \theta_{12} & -l_2 s \theta_{12} \\ l_1 c \theta_1 + l_2 c \theta_{12} & l_2 c \theta_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ r_0 &= \frac{l_1}{\frac{\dot{\theta}_1}{\dot{\theta}_2} + 1} [c\theta_1 \quad s\theta_1 \quad 0]^T \\ P &= [l_1 c \theta_1 + l_2 c \theta_{12} \quad l_1 s \theta_1 + l_2 s \theta_{12} \quad 0]^T \\ \omega &= [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2]^T \end{aligned} \right. \quad (24)$$

综合考虑角速度, P 点的速度写为

$$V_P = \begin{bmatrix} \omega_P \\ v_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -(l_1 s \theta_1 + l_2 s \theta_{12}) & -l_2 s \theta_{12} \\ l_1 c \theta_1 + l_2 c \theta_{12} & l_2 c \theta_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

由此求得了平面 2R 机器人末端参考点的速度,但求解过程复杂,而且随着机器人关节增多,这个方法也就变得越复杂,且不直观。

4.2 运用改进方法求得平面 2R 机器人的速度雅克比矩阵

按照前面已述的改进方法,直接在机器人末端参考点,也就是 P 点建立旋量描述坐标系 $P-xyz$,其姿态与参考坐标系 $O-x_0y_0z_0$ 保持一致,如图 9 所示。该平面 2R 机器人的关节空间是由两个转动副构成,旋量退化为线矢量,因此,两个旋量的节距皆为 0。此时,末端参考点的速度可以写成

$$T = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} = \dot{\theta}_1 {}^P \mathcal{S}_1 + \dot{\theta}_2 {}^P \mathcal{S}_2 = [{}^P \mathcal{S}_1 \quad {}^P \mathcal{S}_2] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中:

$$\left\{ \begin{aligned} {}^P \mathcal{S}_1 &= \begin{bmatrix} s_1 \\ {}^P r_1 \times s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -l_1 s \theta_1 - l_2 s \theta_{12} \\ l_1 c \theta_1 + l_2 c \theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ s_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ {}^P r_1 &= \begin{bmatrix} -l_1 c \theta_1 - l_2 c \theta_{12} \\ -l_1 s \theta_1 - l_2 s \theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^P\mathcal{S}_2 = \begin{bmatrix} s_2 \\ {}^P\mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -l_2 s\theta_{12} \\ l_2 c\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ {}^P\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -l_2 c\theta_{12} \\ -l_2 s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (28)$$

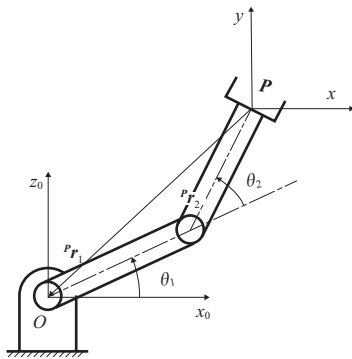


图9 两个关节旋量在旋量描述坐标系 $P\text{-}xyz$ 下描述

因此,所得到机器人在固定参考坐标系 $O\text{-}x_0y_0z_0$ 下的雅克比矩阵为

$$\mathbf{J}^O = ({}^P\mathcal{S}_1 \quad {}^P\mathcal{S}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -l_1 s\theta_1 - l_2 s\theta_{12} & -l_2 s\theta_{12} \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_{12} & l_2 c\theta_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

式(28)与式(15)结果一致,验证了改进方法的正确性。通过对比可知,改进方法更加直观、简洁明了。该方法也适用其他任何串联机器人机构。

5 结语

1) 提出了基于旋量理论建立机器人速度雅克比矩阵的改进方法,即通过在机器人末端参考点建立旋量描述坐标系的方法来建立机器人的速度雅克比矩阵,直接体现机器人关节空间驱动速度到末端参考点速度的映射关系。

2) 通过平面 2R 机器人验证了方法的正确性

与简洁性。

3) 所提出的建立机器人速度雅克比矩阵的改进方法,物理意义明显,推导过程简单明了,适用于任何串联机器人,也为并联机器人、混联机器人建立速度雅克比矩阵提供了一个新的思路。

参考文献:

- [1] 张展魁,岳义,韦宝琛,等. 基于 2UPU-SPR-UPR 的新型五自由度混联机器人优化设计[J]. 机械设计与研究,2025,41(2):1-7.
- [2] 韩旭焰,杨新刚,张小粉. 2P3RR 并联机构灵巧性分析[J]. 机械制造与自动化,2025,54(1):53-57.
- [3] 刘毅,姚建涛,郭禹彤,等. 混联式舱内装配调姿机器人系统设计与分析[J]. 国防科技大学学报,2025,47(2):131-145.
- [4] 尤晶晶,叶鹏达,徐帅,等. Stewart 并联机构运动 Jacobian 矩阵表达形式的多样性[J]. 机械制造与自动化,2023,52(6):85-88,122.
- [5] 王芮雪,田宝俊,李瑞琴,等. 基于 3-UPS/PPR 的推拿机器人运动学分析及仿真[J]. 机械传动,2025,49(2):161-169.
- [6] 罗自荣,徐毓泽,陈善军,等. 2-(U+UPS)PU+UPU 平动机器人腿机构设计与力速性能分析[J]. 中国机械工程,2024,35(12):2193-2202.
- [7] 熊有伦. 机器人学:建模、控制与视觉[M]. 2版. 武汉:华中科技大学出版社,2020:63-90.
- [8] 刘辛军,谢福贵,汪劲松. 并联机器人机构学基础[M]. 北京:高等教育出版社,2018:59-71.
- [9] 祝宏铭. 基于旋量理论的 3-PRS 并联机器人动力学分析与仿真[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学,2020.
- [10] 王国勋,舒启林,王军. 基于旋量理论的 6R 工业机器人运动学建模与分析[J]. 机床与液压,2018,46(23):35-42.
- [11] 冯新红. 基于旋量理论的冗余机械臂运动学奇异性求解和仿真分析[J]. 机械传动,2020,44(9):122-127.
- [12] 孙勇强. 多自由度机械臂运动学及鲁棒跟踪控制研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学,2021.
- [13] 陈庆诚. 结合旋量理论的串联机器人运动特性分析及运动控制研究[D]. 杭州:浙江大学,2015.
- [14] 胡美玲. 基于旋量理论的机械臂非线性模糊滑模控制研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2021.
- [15] 于靖军,刘辛军,丁希仑,等. 机器人机构学的数学基础[M]. 北京:机械工业出版社,2008:309-341.
- [16] 叶平,孙汉旭,谭月胜,等. 旋量理论与矢量积法相结合求解雅可比矩阵[J]. 机械科学与技术,2005,24(3):353-356.
- [17] 黄真,赵永生,赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.

收稿日期:2024-04-16