

DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2025.06.014

3T 型并联机构的结构降耦设计及拓扑特征运动学分析

赵一楠¹, 黄克瑶¹, 胡旸², 黄晓萍¹

(1. 南京机电职业技术学院, 江苏 南京 211300;

2. 南京长江电子信息产业集团有限公司, 江苏 南京 210038)

摘 要:根据并联机构结构降耦原理,对现有的三平移并联机构进行拓扑结构降耦,分析并验证降耦后机构的方位特征、自由度保持不变而耦合度 k 由 1 降为 0;基于有序单开链运动学建模原理,得到关于机构运动学正解的高次封闭方程,据此推导运动学正解的封闭解;求解机构的运动学逆解;在给定的杆件尺度参数下对机构的工作空间及内部奇异位置进行分析。通过对机构进行降耦优化设计,求得降耦后机构运动学正解的封闭解,为机构后续的动力学分析、运动规划和运动控制提供基础。

关键词:并联机构;耦合度;运动学分析;封闭解;工作空间

中图分类号:TH112 **文献标志码:**B **文章编号:**1671-5276(2025)06-0078-07

Structure Coupling-reducing Design and Kinematics Analysis on Topological Characteristics of Three-translational Parallel Mechanism

ZHAO Yinan¹, HUANG Keyao¹, HU Yang², HUANG Xiaoping¹

(1. Nanjing Vocational Institute of Mechatronic Technology, Nanjing 211300, China;

2. Nanjing Changjiang Electronic Group Co., Ltd., Nanjing 210038, China)

Abstract: According to the principle for structure coupling-reducing of parallel mechanism, the topology coupling-reducing is conducted on the existing three-translational PM, and the main topological features of post decoupled mechanism such as position and orientation characteristic, degree of freedom remaining unchanged and coupling degree k decreasing from 1 to 0 are analyzed and verified. Based on the principle of kinematic modeling based on the ordered single open chain, the high degree closed-form equation about the direct kinematics of the PM is obtained, and the closed-form solution of the equation is deduced. Equations of inverse kinematics are derived. The workspace and singular positions of the mechanism are analyzed under the given parameters. Through the structure coupling reduction, the closed-form solution of the direct kinematics is obtained, which provides the basis for the subsequent dynamic analysis and trajectory planning and control of the mechanism.

Keywords: parallel mechanism; coupling degree; kinematics analysis; closed-form solution; workspace

0 引言

对于并联机构而言,运动学正解相较于逆解分析起来更加复杂和困难,而运动学正解在运动学分析中又具有十分重要的地位,它是并联机构进行动力学分析、运动规划和运动控制的前提。同时,运动学正解可以提升机构尺度综合和工作空间分析的效率。为此,学者们对于如何求解并联机构的运动学正解做了大量的工作。解本铭等^[1]利用多层前向神经网络的方法求解了 3 自由度(DOF)5-P4R 并联机构的运动学正解;常振振等^[2]针对 3RPUPc-UPS 并联机构运动学正解求解困难的问题,对新型 3RPUPc-UPS 并联机构的

运动学特性进行了研究,并构建出位置正解求解模型,进而提出了一种基于粒子-人工蜂群算法(P-ABC)的并联机构运动学求解方法;曾庆山等^[3]提出了一种基于 3-RPS 的新型串并混联机构并根据机构特点建立了机构的正解和逆解模型,并得到了相应的数值解;程世利等^[4]对 6-SPS 并联机构进行了分析,得到了关于机构运动学正解的一元十七次代数方程。王超群等^[5]对 6-PUS 并联机构的位姿变量进行了解耦处理,得到了 3 个关于姿态变量的约束方程。方喜峰等^[6]采用消元方法对 6-UPS 交叉杆型并联机床的位置矢量参数进行消元,并通过牛顿迭代法求解出该方程组的迭代函数。尤晶晶等^[7]通过欧拉角和角速度

基金项目:江苏高校“青蓝工程”项目(苏教师函[2023]27号);南京机电职业技术学院重点科研项目(ky202402)

第一作者简介:赵一楠(1995—),男,江苏南京人,讲师,硕士,研究方向为并联机构与机器人机构学,936515322@qq.com。

矢量等描述了动平台的转动速度和位置方程,并据此推导出机构的 Jacobian 矩阵。以上求解的运动学正解大多为数值解,不利于机构的实时控制。求解出机构的解析式运动学正解对于机构后续的工作空间分析、尺度综合、动力学分析、运动规划和运动控制十分有利^[8-11]。文献[12-13]针对所设计的新型并联机构,得到了解析式运动学正解;强红宾等^[14]对一种 1T2R 重载并联稳定平台的解析式运动学正解和动力学进行了建模分析,并证明了解析式运动学正解对动力学建模十分有益。

本文基于并联机构拓扑结构降耦原理与方法^[15-17],对现有的三平移(3T)机构进行结构降耦,使得原机构的耦合度 k 降为 0,并对降耦机构的运动学正逆解进行了分析。

1 并联机构的降耦设计

现有的 3T 型并联机构是基于方位特征(POC)方程的理论^[18-19]设计而成,已对其拓扑特征、运动学正逆解、奇异性和工作空间进行了分析^[20]。

但是,该机构仅含有 1 个 $k=1$ 的子运动链(SK),故求解运动学正解时只能通过一维搜索法带入数值算例进行搜索确认且只能得到数值解。机构的拓扑降耦设计可以使机构在保持基本拓扑特征(DOF、POC)不变的情况下,减少回路间的耦合关系,从而使得机构可以求解出运动学正解的解析解。因此,考虑对该机构进行拓扑降耦设计。

根据并联机构结构降耦原理与设计方法中的降耦方法,通过将 $k=1$ 的混合支链 HSOC 替换若干有序单开链 SOC,即“复合转动副或复合球副法”。将支链 II 中的球副 S_{23} 和支链 III 中的球副 S_{33} 合并,考虑到复合球副制造麻烦,可将 S_{33} 移至支链 II 上,并将支链位置重新布置,即可得到结构降耦后机构,如图 1 所示;图 2 为并联机构三维模型。

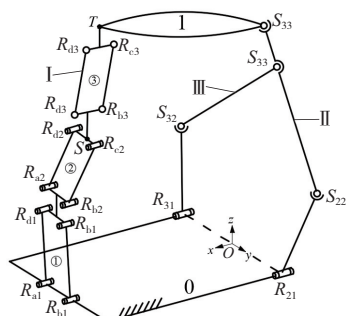


图1 降耦3T并联机构简图

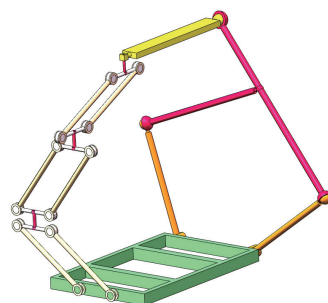


图2 降耦3T并联机构三维模型

该降耦机构的动、静平台由两条混合支链(hybrid single-open-chain, HSOC)连接,混合支链 I 由 3 个 4R 平行四边形机构 $R_{ai}R_{bi}R_{ci}R_{di}$, ($i=1,2,3$) 串联而成,从连接静平台 0 到连接动平台 1 的平行四边形机构分别记为①、②、③;其中,平行四边形①、②共面,且与平行四边形③所在的平面垂直,3 个平行四边形的连接点均为短边的中点。

无约束支链 $SOC_3\{R_{31}-S_{32}-S_{33}\}$ 上的球副 S_{33} 铰接于杆 $S_{22}-S_{23}$ 上,两者构成了第 2 条 HSOC₂。因此,机构的动平台 1 只有两个联接点,即 T 和 S_{23} 。

2 并联机构的拓扑分析

2.1 方位特征验证

第 1 条混合支链 HSOC₁ 和结构降耦前相比没有发生变化,故 POC 集为

$$M_{HSOC_1} = M_{bI} = \bigcup_{i=1}^3 \left[\begin{array}{c} (t^1 \parallel \diamond (R_{ai}R_{bi}R_{ci}R_{di})) \\ r^0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right] \quad (1)$$

式中: r 为转动输出; t 为移动输出。

平行四边形②上方短杆上的中点 S 的 POC 集为两平移(2T),连接在平行四边形③末端输出杆上方 T 点的 POC 集为三平移(3T)。

第 2 条混合支链 HSOC₂ 由两条 RSS 无约束支链 II 和 III 组合而成。因此,混合支链 2 的末端 POC 集为

$$M_{HSOC_2} = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] \cap \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] \quad (2)$$

整个机构末端动平台 1 的 POC 集为

$$M_{pa} = M_{HSOC_1} \cap M_{HSOC_2} = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right] \cap \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} t^3 \\ r^0 \end{array} \right] \quad (3)$$

因此,动平台 1 可实现 3T 运动输出。

2.2 机构自由度

结构降耦后,机构由2条混合支链 $HSOC_1$ 和 $HSOC_2$ 构成。机构包含2个独立回路,第1回路为 $\{R_{21}-S_{22}-S_{33}-S_{32}-R_{31}\}$,且构成1个子并联机构,其独立位移方程数为

$$\xi_{L1} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6 \quad (4)$$

该子并联机构的自由度为

$$F_{\text{sub}} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^1 \xi_{Lj} = (11 - 3) - 6 = 2 \quad (5)$$

在分析第2回路时,因球副 S_{22} 、 S_{32} 、 S_{33} 组成了虚拟三角构件,绕球副 S_{22} 和 S_{32} 连线的转动,实际上可等效为一个转动副,所以回路 $\{P^{(4R)} \parallel P^{(4R)} \perp P^{(4R)} - S_{23} - R^{S_{22}S_{33}}\}$ 组成了第2个独立回路,其独立位移方程数 ξ_{L2} 为

$$\xi_{L2} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^0 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6 \quad (6)$$

因此,机构的自由度为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{Lj} = (8 + 7) - (6 + 6) = 3 \quad (7)$$

因此,该机构的自由度为3,当取静平台0上的转动副 R_{a1} 、 R_{21} 、 R_{31} 为驱动时,动平台1可实现3T运动输出。

2.3 机构耦合度

任一机构均可分解为若干个约束度为正、负、零的SOC,在2.2节中,已计算出机构结构降耦之后2个新的独立回路的独立位移方程数,即 $\xi_{L1} = \xi_{L2} = 6$,因此,由第1回路的约束度可得

$$\Omega_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = (2 + 9 - 3) - 2 - 6 = 0 \quad (8)$$

式中括号内部-3为去除绕 $S_{22}S_{32}$ 、 $S_{22}S_{33}$ 和 $S_{32}S_{33}$ 这3组运动副连线的局部转动自由度。同时,在计算第2回路的约束度时,应将绕 $S_{22}S_{32}$ 转动的局部自由度计入,即第2回路的约束度和整个机构的耦合度分别为

$$\Omega_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = (6 + 1) - 1 - 6 = 0 \quad (9)$$

$$k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v |\Omega_j| = 0 \quad (10)$$

由式(8)和式(9)得,上述两个回路均构成独立的SKC,即整个并联机构由两个SKC组成,分

别记为 SKC_1 和 SKC_2 ,由式(10)可知该并联机构的耦合度为0。

3 运动学求解

3.1 坐标系建立与参数标注

机构的运动学建模如图3所示,机构的静平台0为矩形, A_1 位于矩形短边的中点,矩形的长边尺寸即 A_1 到 A_2A_3 的垂直距离记为 a ,短边尺寸即线段 A_2A_3 的尺寸记为 $2b$;以 A_2 、 A_3 点连线的中点 O 为原点建立笛卡儿静坐标系 $O-xyz$; x 轴平行于矩形静平台的长边指向点 A_1 , y 轴平行于定平台的短边指向 A_2 点, z 轴方向由右手法则确定。

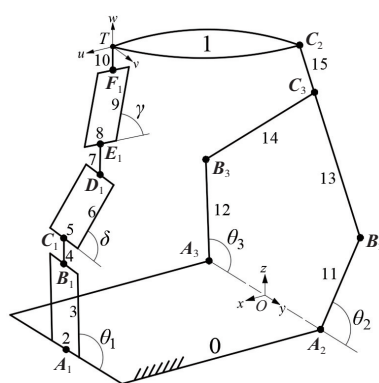


图3 运动学建模图

在动平台1的一端点 T 处建立动坐标系 $T-uvw$,与静坐标系 $O-xyz$ 上的各坐标轴方向一致。向量 A_1B_1 、 A_2B_2 和 A_3B_3 与 y 轴正方向的夹角依次记为 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 ;设定 C_1D_1 与 y 轴正方向的夹角为中间变量 δ , E_1F_1 与 x 轴负方向的夹角为虚拟变量 γ 。

设定该机构的结构参数:动平台 TC_2 的长度为 l_2 ;平行四边形短杆2、短杆5、短杆8的长度为 l_3 ,长杆3、长杆6、长杆9的长度为 l_4 ;连接杆4、连接杆7、连接杆10的长度均为 l_5 ; A_2B_2 和 A_3B_3 的长度为 l_7 , B_2C_3 和 B_3C_3 的长度为 l_8 , C_3C_2 的长度为 l_9 。

因此,在静坐标系 $O-xyz$ 下, A_1 、 A_2 和 A_3 的坐标可分别表示为 $(a, 0, 0)$ 、 $(0, b, 0)$ 、 $(0, -b, 0)$ 。

3.2 运动学正解求解原理

由2.3节分析可知,降耦后的机构包含有2个SKC,且每个SKC内只含有1个约束度为0的单开链,故每个SKC内部运动副的位置确定,运动学正解可在每个SKC内依次独立求解。

3.3 运动学正解

已知输入角 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 ,求解动平台1上点 T 的坐标 (x, y, z) 。

1) SKC₁ 内部求解

由角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 可将点 B_1, B_2, B_3 的坐标依次表示为

$$\begin{cases} B_1 = [a, l_4 \cos \theta_1, l_4 \sin \theta_1]^T \\ B_2 = [0, b + l_7 \cos \theta_2, l_7 \sin \theta_2]^T \\ B_3 = [0, -b + l_7 \cos \theta_3, l_7 \sin \theta_3]^T \end{cases} \quad (11)$$

由杆长约束 $B_2 C_3 = B_3 C_3 = l_8$, 可得

$$\begin{cases} (x_{C_3} - x_{B_2})^2 + (y_{C_3} - y_{B_2})^2 + (z_{C_3} - z_{B_2})^2 = l_8^2 \\ (x_{C_3} - x_{B_3})^2 + (y_{C_3} - y_{B_3})^2 + (z_{C_3} - z_{B_3})^2 = l_8^2 \end{cases} \quad (12)$$

将式(12)进行整理,用点 C_3 的 y 坐标 y_{C_3} 表示出 z 坐标 z_{C_3} 为

$$z_{C_3} = K_1 y_{C_3} + K_2 \quad (13)$$

式中: $K_1 = \frac{-2b - l_7 J_2}{l_7 J_3}$; $K_2 = b \frac{J_1}{J_3}$; $J_1 = \cos \theta_2 + \cos \theta_3$; $J_2 = \cos \theta_2 - \cos \theta_3$; $J_3 = \sin \theta_2 - \sin \theta_3$ 。

将式(13)回代到式(12)中任一等式内,即可用点 C_3 的 y 坐标 y_{C_3} 表示 x 坐标 x_{C_3} 为

$$x_{C_3} = \pm \sqrt{L_1 y_{C_3}^2 + L_2 y_{C_3} + L_3} \quad (14)$$

式中: $L_1 = -1 - K_1^2$; $L_2 = 2(b + l_7 \cos \theta_2 - 2K_1 K_2 + 2l_7 \sin \theta_2 K_1)$; $L_3 = -b^2 - l_7^2 - 2bl_7 \cos \theta_2 - K_2^2 + 2l_7 \sin \theta_2 K_2 + l_8^2$ 。

至此, C_3 点的所有坐标都用 y_{C_3} 表示出来。

2) SKC₂ 内部求解

由杆 $B_2 C_2$ 上点 B_2, C_3, C_2 之间的比例关系, 设定 $\lambda = (l_8 + l_9)/l_8$, 由此可表示出点 C_2 的坐标为

$$\begin{cases} x_{C_2} = (x_{C_3} - x_{B_2})\lambda + x_{B_2} \\ y_{C_2} = (y_{C_3} - y_{B_2})\lambda + y_{B_2} \\ z_{C_2} = (z_{C_3} - z_{B_2})\lambda + z_{B_2} \end{cases} \quad (15)$$

由混合支链1的几何约束关系可知,点 E_1 的 y 坐标可表示为

$$y_{E_1} = l_4 \cos \theta_1 + l_4 \cos \delta \quad (16)$$

由于机构动平台做三平移运动输出,由混合支链1的末端输出也是三平移,于是有这样一个几何约束关系 $y_{E_1} = y_{F_1} = y_T = y_{C_2}$, 联立式(15)和式(16)可得

$$\cos \delta = M_1 y_{C_3} + M_2 \quad (17)$$

式中: $M_1 = \lambda/l_4$; $M_2 = (y_{B_2} - \lambda y_{B_2} - l_4 \cos \theta_1)/l_4$ 。

于是,点 E_1 的坐标可表示为

$$E_1 = [a, y_{E_1}, l_4 \sin \theta_1 + l_4 \sin \delta + 2l_5]^T \quad (18)$$

通过式(17)用点 C_2 的坐标表示出点 T 的坐标为

$$T = [x_{C_2} + l_2, y_{C_2}, z_{C_2}]^T \quad (19)$$

至此,并联机构末端动平台上点 T 的坐标已表示完成。

同样,由式(17)表示出点 F_1 的坐标为

$$F_1 = [x_{C_2} + l_2, y_{C_2}, z_{C_2} - l_5]^T \quad (20)$$

由杆长约束条件 $E_1 F_1 = l_4$ 可得

$$(x_{F_1} - x_{E_1})^2 + (y_{F_1} - y_{E_1})^2 + (z_{F_1} - z_{E_1})^2 = l_4^2 \quad (21)$$

将式(21)进行展开、整理,得到关于变量 y_{C_3} 的一元八次位置正解封闭方程为

$$f(y_{C_3}) = \sum_{i=0}^8 T_i y_{C_3}^i = 0 \quad (22)$$

式中: $T_0 = R_5^2 - S_5 + S_5 M_2^2$; $T_1 = 2R_4 R_5 - S_4 + 2S_5 M_1 M_2 + S_4 M_2^2$; $T_2 = 2(R_3 R_5 + S_4 M_1 M_2) + R_4^2 - S_3 + S_5 M_1^2 + S_3 M_2^2$; $T_3 = 2(R_2 R_5 + R_3 R_4 + S_3 M_1 M_2) - S_2 + S_4 M_1^2 + S_2 M_2^2$; $T_4 = 2(R_1 R_5 + R_2 R_4 + S_2 M_1 M_2) + R_3^2 - S_1 + S_3 M_1^2 + S_1 M_2^2$; $T_5 = 2(R_1 R_4 + R_2 R_3 + S_1 M_1 M_2 + S_2 M_1^2)$; $T_6 = 2R_1 R_3 + R_2^2 + S_1 M_1^2$; $T_7 = 2R_1 R_2$; $T_8 = R_1^2$; $S_1 = 4Q_4^2 Q_6^2 L_1$; $S_2 = 4Q_4^2 Q_6^2 L_2 + 8Q_4 Q_5 Q_6^2 L_1$; $S_3 = 4Q_4^2 Q_6^2 L_3 + 8Q_4 Q_5 Q_6^2 L_2 + 4Q_5^2 Q_6^2 L_1$; $S_4 = 8Q_4 Q_5 Q_6^2 L_3 + 4Q_5^2 Q_6^2 L_2$; $S_5 = 4Q_5^2 Q_6^2 L_3$; $R_1 = Q_1^2 + Q_4^2 M_1^2$; $R_2 = 2Q_1 Q_2 + 2M_1 M_2 Q_4^2 + 2Q_4 Q_5 M_1^2$; $R_3 = Q_2^2 + 2Q_1 Q_3 - Q_4^2 + M_2^2 Q_4^2 + 4Q_4 Q_5 M_1 M_2 + Q_5^2 M_1^2 - Q_6^2 L_1$; $R_4 = 2Q_2 Q_3 - 2Q_4 Q_5 + 2Q_4 Q_5 M_2^2 + 2M_1 M_2 Q_5 - Q_6^2 L_2$; $R_5 = Q_3^2 - Q_5^2 + Q_5^2 M_2^2 - Q_6^2 L_3$; $Q_1 = \lambda^2 L_1 + \lambda^2 K_1^2 - L_4^2 M_1^2$; $Q_2 = \lambda^2 L_2 + 2\lambda P_2 K_1 - 2M_1 M_2 L_4^2$; $Q_3 = \lambda^2 L_3 + P_1^2 + L_4^2 - L_4^2 M_2^2 + P_2^2 - l_4^2$; $Q_4 = 2\lambda K_1 l_4$; $Q_5 = 2l_4 P_2$; $Q_6 = -2\lambda P_1$; $P_1 = l_2 - a$; $P_2 = -K_2 \lambda - \lambda l_7 \sin \theta_2 + l_7 \sin \theta_2 - l_4 \sin \theta_1 - 3l_5$; $M_1 = \lambda/l_4$; $M_2 = (y_{B_2} - \lambda y_{B_2} - l_4 \cos \theta_1)/l_4$ 。

利用 Mathematica 软件求出式(22)的实根,再将实根代入式(19)即可得到机构动平台末端点 T 的坐标。

3.4 运动学逆解

已知动平台1上点 T 的坐标 (x, y, z) , 求输入角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 。

通过虚拟变量 γ 表示出点 T 的 x 坐标为

$$x = a - l_4 \cos \gamma \quad (23)$$

由于假设 x 值已知,故可得 $\gamma = \arccos\left(\frac{a-x}{l_4}\right)$ 。

由动平台上 T 的坐标向静平台方向表示出点 D_1 的坐标为 $D_1 = [x + l_4 \cos \gamma, y, z - l_4 \sin \gamma - l_5]^T$ 。

由定平台向上可表示出点 C_1 的坐标为

$$C_1 = [a, l_4 \cos \theta_1, l_4 \sin \theta_1 + l_5]^T \quad (24)$$

由杆长约束条件 $l_{C_1 D_1} = l_4$ 可求解出输入角 θ_1 为

$$\theta_1 = 2 \arctan \left(\frac{-N_5 \pm \sqrt{N_5^2 - 4N_4 N_6}}{2N_4} \right) \quad (25)$$

式中: $N_1 = x + l_4 \cos \gamma - a$; $N_2 = z - l_4 \sin \gamma - 2l_5$; $N_3 = N_1^2 +$

$N_2^2+y^2; N_4=2l_4y+N_3; N_5=-4l_4N_2; N_6=-2l_4y+N_3。$

由点 T 的坐标沿着 x 轴负方向可将点 C_2 的坐标表示为 $[x-a, y, z]^T$ 。

根据杆 C_2B_2 上点 C_3 的比例关系, 可以将点 C_3 的坐标表示为

$$C_3 = \begin{bmatrix} \frac{\lambda-1}{\lambda}x_{B_2} + \frac{1}{\lambda}x_{C_2} \\ \frac{\lambda-1}{\lambda}y_{B_2} + \frac{1}{\lambda}y_{C_2} \\ \frac{\lambda-1}{\lambda}z_{B_2} + \frac{1}{\lambda}z_{C_2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

由杆长约束条件 $B_2C_2=l_8+l_9, B_3C_3=l_8$ 有

$$\begin{cases} (x_{C_2}-x_{B_2})^2+(y_{C_2}-y_{B_2})^2+(z_{C_2}-z_{B_2})^2=(l_8+l_9)^2 \\ (x_{C_3}-x_{B_3})^2+(y_{C_3}-y_{B_3})^2+(z_{C_3}-z_{B_3})^2=l_8^2 \end{cases} \quad (27)$$

整理简化得:

$$\theta_2 = 2\arctan\left(\frac{-V_1 \pm \sqrt{V_1^2 - V_3^2 + V_2^2}}{V_3 - V_2}\right) \quad (28)$$

$$\theta_3 = 2\arctan\left(\frac{-W_5 \pm \sqrt{W_5^2 - W_6^2 + W_4^2}}{W_6 - W_4}\right) \quad (29)$$

式中: $V_1=-2l_7z; V_2=-2(y-b)l_7; V_3=(x-a)^2+(y-b)^2+z^2+l_7^2-(l_8+l_9)^2; W_1=(x-a)/\lambda; W_2=(\lambda-1)(b+l_7\cos\theta_2)/\lambda+y/\lambda+b; W_3=(\lambda-1)l_7\sin\theta_2/\lambda+z/\lambda; W_4=-2W_2l_7; W_5=-2W_3l_7; W_6=W_1^2+W_2^2+W_3^2+l_7^2-l_8^2。$

至此, 所有输入参数 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 已全部求解。

3.5 正逆解验证

为了验证运动学建模的准确性, 设定机构的尺寸参数(单位: mm)为: $a=315, b=80, l_2=250, l_3=70, l_4=154, l_5=28, l_7=198, l_8=230, l_9=145$, 并据此参数在 SolidWorks 软件中对机构进行三维建模。

在三维模型中任意选取机构的一组位姿, 量取对应的输入值和输出值如表 1 所示。

表 1 量的输入与输出

输入/(°)			输出/mm		
θ_1	θ_2	θ_3	x	y	z
143.16	35.69	106.56	175.80	-29.62	364.46

将表 1 中的输入值 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 代入式(22), 利用 Mathematica 软件计算、整理得到方程的两个实根分别为 $y_{C_3}=67.029\ 6$ 和 $y_{C_3}=74.956\ 6$; 在 Matlab 软件中编写正解程序, 并将这两个实根代

入式(15)和式(19), 计算可得机构位置正解如表 2 所示。由表 2 可知, 第 1 组正解和表 1 中输出值一致。

表 2 机构的位置正解数值 单位: mm

序号	x	y	z
1	176.000 0	-29.616 5	364.546 3
2	324.000 0	-29.616 5	364.546 3
3	86.564 4	-42.545 0	298.876 8
4	413.435 6	-42.545 0	298.876 8

接着, 取表 2 中第 1 组的正解数值, 代入到逆解求解式(25)、式(28)和(29)中, 可得 8 组 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的逆解数值, 如表 3 所示。

表 3 机构的位置逆解数值 单位: (°)

序号	θ_1	θ_2	θ_3
1	143.165 5	35.685 6	106.558 4
2	52.526 6	35.685 6	106.558 4
3	52.526 6	177.794 2	149.526 1
4	143.165 5	177.794 2	149.526 1
5	143.165 5	35.685 6	13.407 0
6	52.526 6	35.685 6	13.407 0
7	52.526 6	177.794 2	22.259 4
8	143.165 5	177.794 2	22.259 4

可见, 表 3 中第 1 组逆解数值和表 1 中测得的 3 个输入角一致, 最大相对误差值小于 0.01%。同样, 用表 1 中的其他正解数据, 也验证了 3 个输入角的一致性。因此, 运动学正、逆解公式导出正确。

4 工作空间及内部奇异分析

机构的工作空间分析采用离散化空间三维搜索法, 将搜索范围设定为: $-100 \leq x \leq 300, -400 \leq y \leq 400, 100 \leq z \leq 700, -\pi \leq \theta \leq \pi$; 球副的运动范围设定为 $\pm 45^\circ$ 。

通过 Matlab 求得串联奇异在工作空间中如图 4 所示, 其中, 深色点表示串联奇异位置。串联奇异可以通过实际控制手图段避开。因此, 本文主要讨论并联奇异, 即第 II 类奇异。运用 Matlab 软件编程求解, 得到如图 5 所示的机构工作空间的三维立体图。

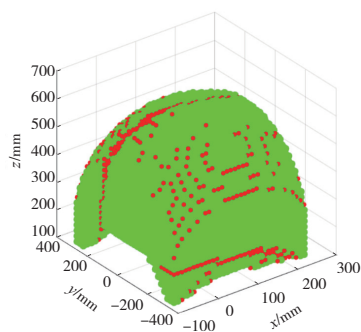


图4 workspace串联奇异情况

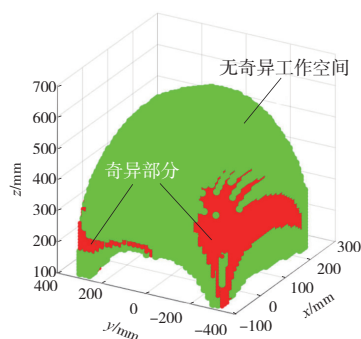
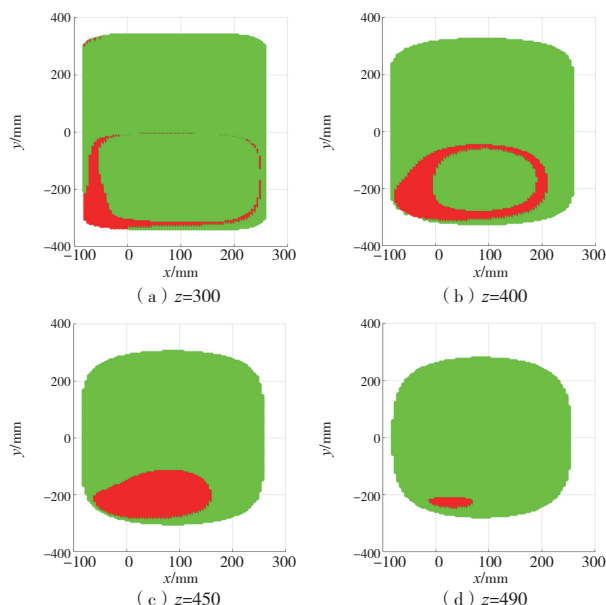


图5 workspace并联奇异情况

由图5可知该工作空间内部的无奇异 workspace 较大。图6所示的4个截面表明随着 z 值的改变,各个 x - y 截面内奇异与非奇异 workspace 情况。

图6 workspace内不同 x - y 截面奇异情况

5 结语

在保证并联机构 POC 和 DOF 不变的情况下,针对初始设计的三平移并联机构进行结构降耦优化设计,使机构的耦合度由原来的 1 降为 0,在结构优化的同时也保证了机构仍具有较大的无奇异 workspace。相较于优化前的结构,优化后的新型零耦合度三平移并联机构可以得到符号式位置正解,这一改进提升了机构的拓扑性能,使得后续的动力学分析更为便捷。本文研究工作为该机构后续的动力学分析、运动规划和运动控制奠定了基础。

参考文献:

- [1] 解本铭,孙伟. 基于 BP 神经网络 5-P4R 并联机构位置正解研究[J]. 机床与液压, 2016, 44(17): 33-35, 75.
- [2] 常振振,张彦斌,张双,等. 基于粒子-人工蜂群算法的 3RPUP₀-UPS 并联机构运动学正解研究[J]. 机电工程, 2024, 41(2): 311-318.
- [3] 曾庆山,马飞凡. 一种可实现多运动模态的串并联机构的运动学分析[J]. 郑州大学学报(理学版), 2024, 56(1): 25-31.
- [4] 程世利,吴洪涛,姚裕,等. 6-SPS 并联机构运动学正解的一种解析化方法[J]. 机械工程学报, 2010, 46(9): 26-31.
- [5] 王超群,吴洪涛. 6-PUS 并联机构的运动学正解分析[J]. 中国机械工程, 2013, 24(7): 853-856.
- [6] 方喜峰,赵若愚,吴洪涛,等. 6-UPS 交叉杆型并联机床的运动学正解算法[J]. 机械工程学报, 2012, 48(13): 56-60.
- [7] 尤晶晶,叶鹏达,徐帅,等. Stewart 并联机构运动 Jacobian 矩阵表达形式的多样性[J]. 机械制造与自动化, 2023, 52(6): 85-88, 122.
- [8] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [9] 沈惠平,李菊,朱小蓉,等. 基于最优路径的并联机构自由度计算方法及其新公式[J]. 机械工程学报, 2024, 60(19): 40-52.
- [10] 余俊杰,李菊,孔祥超,等. 4 个运动解耦的单回路两自由度三平移并联机构的拓扑设计及其位置封闭解研究[J]. 机械传动, 2025, 49(6): 60-70.
- [11] 鞠涛,沈惠平,李涛. 一种用于汽车零部件分拣与传送并联机构的设计及动力学分析[J]. 机械传动, 2024, 48(2): 61-69.
- [12] 闻王虎,尤晶晶,叶鹏达,等. 零耦合度 Stewart 型并联机器人的位置正解个数[J]. 南京航空航天大学学报, 2024, 56(5): 960-967.

- [13] 韩秀英,李旭莹,黄杰.一种新型3-R(4r)(4r)R并联机构及运动学分析[J].工程与试验,2024,64(2):15-18.
- [14] 强红宾,杜亮亮,康绍鹏,等.具有解析解的1T2R重载并联稳定平台运动学及动力学建模[J].兵工学报,2024,45(11):3959-3969.
- [15] 沈惠平,朱小蓉,尹洪波,等.并联机构的结构降耦原理及其设计方法[J].机械工程学报,2016,52(23):102-113.
- [16] 杜中秋,沈惠平,孟庆梅,等.运动解耦且正解符号化的8R两平移空间并联机构的设计与性能分析[J].中国机械工程,2023,34(12):1425-1435.
- [17] 朱小蓉,赵磊,沈惠平.3T1R解耦并联机构动力学与惯量耦合特性分析[J].农业机械学报,2023,54(9):448-458.
- [18] 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等.机器人机构拓扑结构设计[M].北京:科学出版社,2012.
- [19] YANG T L, LIU A X, SHEN H P, et al. Topology Design of Robot Mechanisms [M]. Singapore: Springer Singapore, 2018.
- [20] 沈惠平,赵一楠,许正晓,等.低耦合度半对称三平移并联机构拓扑设计与运动学分析[J].农业机械学报,2019,50(3):404-411,357.

收稿日期:2024-03-29

(上接第77页)

参考文献:

- [1] 国家烟草专卖局颁发.卷烟工艺规范[M].北京:中国轻工业出版社,2016.
- [2] 张亚平,郑丰,张晓宇,等.基于热分析技术的烟丝掺配均匀度测定方法[J].烟草科技,2019,52(7):83-88.
- [3] 柳雨明.基于六西格玛的H卷烟厂回用烟丝质量提升研究[D].杭州:浙江大学,2021.
- [4] 赵梦达.研发提高气流烟丝掺配均匀性的装置[J].科技创新与应用,2018,8(7):7-9.
- [5] 司小山,刘海龙,张超锋,等.一种烟草小尺寸烟片自动添加装置:中国,CN202022253928.4[P].2021-07-27.
- [6] 郭硕达,韩伟,于振江,等.一种基于电子皮带秤的物料掺配控制装置:中国,CN212558536U[P].2021-02-19.
- [7] 杨露,田德兴,刘兵,等.基于精细化加工的卷烟叶丝回收装置优化研究[J].今日制造与升级,2022(7):142-144.
- [8] 普云伟,杨露,肖智斌,等.多级筛分-柔性风选协同的梗签废料烟丝回收系统设计[J].烟草科技,2025,58(7):60-68.
- [9] 方瑞萍,程亮,杨露,等.基于VAS梗签剔除物结构形态表征的分离装置研制[J].农业装备与车辆工程,2025,63(4):115-118.
- [10] 唐习书,田德兴,方瑞萍,等.卷烟制造过程梗签分离工艺及装备研究进展[J].轻工学报,2024,39(4):109-117.
- [11] 普云伟,方瑞萍,肖智斌,等.一种制丝线芝麻片或颗粒梗掺配流量控制装置:中国,CN216415996U[P].2022-05-03.
- [12] 刘峰波,李笑笑.陕西黄陵建庄矿业皮带计量设计应用实践[J].内蒙古煤炭经济,2022(12):139-141.
- [13] 胡安,刘延新,陈武剑,等.一种激振筛:中国,CN219850703U[P].2023-10-20.
- [14] 邢震,田野新,包建军,等.带式输送机托辊故障诊断及协同管控研究综述[J].工矿自动化,2025,51(3):39-53.
- [15] 范国帅,刘初升,娄云利,等.基于空间六自由度的振动筛完整动力学模型动态特性研究[J].中国矿业大学学报,2024,53(1):176-185.
- [16] 赵安,马彬彬.基于Profinet通信协议的多电机运行监控系统设计[J].机械制造与自动化,2024,53(5):239-241.
- [17] 童恩善.基于变频器与PLC的刨床控制系统设计[J].电工技术,2025(4):8-10.
- [18] 濮良贵,纪名刚.西北工业大学机械原理及机械零件教研室编著.机械设计[M].8版.北京:高等教育出版社,2006.
- [19] 孙希波.皮带机辊筒辊皮在线包胶的修复工艺[J].水泥,2024(3):75.
- [20] 杨培森,张虹,张文.烟草检验工(物理)基础知识[M].郑州:河南科学技术出版社,2021.
- [21] 烟草物理检验员(二级)专业知识编写组.烟草物理检验员(二级)专业知识[M].郑州:河南科学技术出版社,2024.
- [22] 蒋文翔,杨小辉.叶丝线水分过程控制能力的研究[J].中国设备工程,2024(3):12-16.

收稿日期:2025-02-06