

DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2026.02.052

基于优化算法的主动磁轴承 PID 自动调优研究

邢金铎, 肖盼, 聂朝瑞, 雷偲凡

(陕西职业技术学院 汽车工程与通用航空学院, 陕西 西安 710038)

摘要: 针对在工业应用中, 主动磁轴承(AMBs)支撑的透平机械广泛采用增广比例-积分-微分(PID)控制器, 但其传统的手动调优过程复杂且耗时, 高度依赖工程师经验的问题, 提出一种基于非光滑优化算法的自动调优方法, 将性能指标转化为数学约束和目标函数。通过优化算法自动调整控制器参数, 并考虑系统不确定性和工况变化。研究以油气领域的透平机械为对象, 建立 AMBs 系统的动态模型, 并采用非光滑优化算法进行控制器参数调优。仿真分析结果表明: 该方法能在约 7 h 内完成调优, 满足系统稳定性、灵敏度、刚度等所有性能要求, 并在实际设备上验证其有效性。

关键词: 主动磁轴承; 增广比例-积分-微分; 自动调优; 转子动力学; 非光滑优化算法; 透平机械

中图分类号: TH133.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5276(2026)02-0274-06

Research on Automatic Tuning of Active Magnetic Bearing PID Based on Optimization Algorithms

XING Jinduo, XIAO Pan, NIE Chaorui, LEI Sifan

(School of Automotive Engineering and General Aviation, Shaanxi Vocational & Technical College, Xi'an 710038, China)

Abstract: In industrial applications, turbomachinery supported by active magnetic bearings (AMBs) often uses augmented PID controllers. However, traditional manual tuning is complex, time-consuming, and experience-dependent. This paper proposes an automatic tuning method based on a nonsmooth optimization algorithm. It converts performance criteria into mathematical constraints and objectives, automatically adjusts controller parameters, and considers system uncertainties and varying conditions. Focusing on oil and gas applications, the study models the AMBs system and applies the optimization algorithm for tuning. Results show that the method completes tuning in about 7 h, meeting all performance requirements, including stability, sensitivity, and stiffness, and is validated on actual equipment.

Keywords: active magnetic bearings; augmented proportional-integral-derivative; automatic tuning; rotodynamic; nonsmooth optimization algorithm; turbomachinery

0 引言

主动磁轴承(active magnetic bearing, AMBs)如今在各类旋转机械中被广泛应用^[1-4]。不过, AMBs 作为一个复杂的机电一体化系统, 包含控制器、位置传感器和执行器等部件^[5]。由于执行器功率有限, AMBs 的承载能力低于传统轴承, 且其本质上是不稳定的, 需要依靠基于转子位置测量的稳定化反馈控制来维持运行。因此, 控制器设计成为关键^[6-7]。

增广比例-积分-微分(PID)控制器因结构简单, 在工业中是应用最广泛的 AMBs 控制器^[8-9]。然而, 这些控制器的调优过程是关键环节, 通常需要凭借经验进行多次手动迭代^[10-11]。为此, 本文提出了一种基于模型的增广 PID 控制器自动调优

方法。该方法借助非光滑优化技术, 将设计要求和“最佳实践”规则融入优化过程, 与手动调优相比, 自动调优方法通过优化算法更新了调优流程, 大幅提升了效率。同时, 该方法还考虑了系统模型的不确定性, 尤其是转子模型和旋转速度对模型的影响。本文以油气领域的实际透平机械为例, 详细阐述了 AMBs 系统的建模、自动调优方法的实施以及实验验证过程。

1 微光系统描述和动态建模

1.1 AMBs 系统建模

图 1 为 AMBs 支撑的涡轮机械, 径向 AMBs 由 4 个电磁铁、两个正交轴组成。

基金项目: 陕西省科技计划项目(QCYRCXM-2022-141)

第一作者简介: 邢金铎(1988—), 男, 陕西西安人, 高级工程师, 本科, 研究方向为工程机械, u87991@126.com。

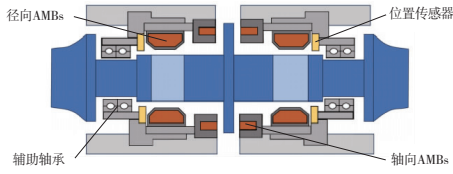


图1 AMBs系统装置示意图

调节电流可产生不同力, z 轴力 F_z 公式^[12-13]:

$$F_z = k_i i_z - k_s z \quad (1)$$

式中: z 为转子沿 z 轴位移; k_i 和 k_s 分别为电气增益与负刚度。因负刚度, AMBs 需置于闭环系统, 如图2所示。

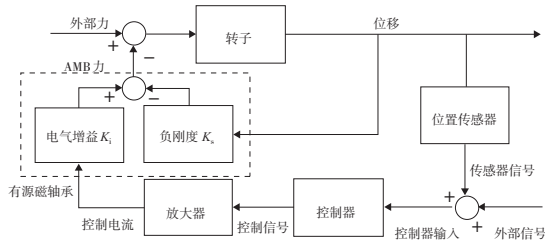


图2 AMBs系统框图

用状态空间形式对各组件建模以模拟闭环动态, 径向模型由有限元法和 Timoshenko 模型求得^[14-15], 转子动态由微分方程描述:

$$M\ddot{q} + (C + \Omega C_g)\dot{q} + (K - K_s)q = F_{AMB} + F_{ext} \quad (2)$$

式中: M 为质量矩阵; C 为阻尼矩阵; C_g 为陀螺矩阵; K 为刚度矩阵; Ω 为转子转速; F_{ext} 为外力; F_{AMB} 为控制力; q 为节点位置和旋转向量; K_s 为负刚度矩阵。转子的状态空间模型可写成:

$$\begin{cases} \dot{X}_R = A_R X_R + B_R (F_{AMB} + F_{ext}) \\ q = C_R X_R \end{cases} \quad (3)$$

式中 C_R 、 A_R 、 B_R 和 X_R 为模型的矩阵。

系统解耦特性使 AMBs 可用对角线性模型描述, 得到 $G_s(s)$ 、 $G_a(s)$ 和 $G_c(s)$, 传递函数 $G_B(s) = G_{act}(s)G_c(s)G_s(s)$ 可按规范形式描述为状态空间系统:

$$\begin{cases} \dot{X}_B = A_B X_B + B_B q \\ F_{AMB} = C_B X_B \end{cases} \quad (4)$$

式中: X_B 为状态向量; A_B 、 B_B 、 C_B 为第二状态空间模型矩阵。结合式(3)、式(4)可得整个闭环系统的状态空间模型方程:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_R \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_R & B_R C_B \\ B_B C_R & A_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_R \\ X_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_R \\ 0 \end{bmatrix} F_{ext} =$$

$$A \begin{bmatrix} X_R \\ X_B \end{bmatrix} + B F_{ext} \quad (5)$$

1.2 增强型 PID 结构

本文采用增强型 PID 控制器, 每个控制轴有独立的控制单元。该控制器由比例、积分和导数部分组成。单个增强型 PID 控制器的数学表示如下:

$$G_{ci}(s) = K_{Ci} \left(\frac{K_{fi}}{s} + F_i(s) \right) D(s) \quad (6)$$

式中: K_{Ci} 和 K_{fi} 为控制器常数; $F_i(s)$ 为实现特定频率导数动作的前馈滤波器动态; $D(s)$ 为描述 DAC 采样时间延迟对数字控制器影响的参数。图3展示了增强型 PID 结构。

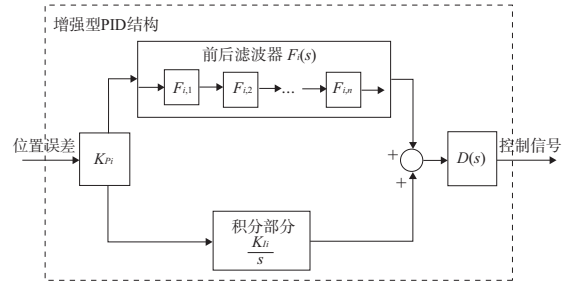


图3 增强型PID结构

在 AMBs 应用中, 增强型 PID 控制器的积分作用限于低频。低频时, 其重要性显著, 与滤波器固有频率匹配, 滤波器可为 1 阶或 2 阶:

$$F_{i,j}(s) = \frac{\tau_{i,j} s + 1}{\alpha_{i,j} \tau_{i,j} s + 1} \quad (7)$$

$$F_{i,j}(s) = \frac{\frac{s^2}{\omega_{zi,j}^2} + \frac{2\delta_{zi,j}}{\omega_{zi,j}} s + 1}{\frac{s^2}{\omega_{pi,j}^2} + \frac{2\delta_{pi,j}}{\omega_{pi,j}} s + 1} \quad (8)$$

式中: $\tau_{i,j} > 0$; $\alpha > 0$ 为第一类滤波器参数; $0 < \delta_{zi,j} < 1$; $\omega_{zi,j} > 0$, $0 < \delta_{pi,j} < 1$, $\omega_{pi,j} > 0$ 为第二类滤波器参数。

2 增强型 PID 自动调谐

本文采用非光滑优化方法实现自动调谐^[16-17]。系统采用线性分数变换(LFT)工厂描述(见图4), 明确表示参数不确定性 Δ (实数)。控制器传递函数为 $G_c(s, p)$, $p \in R^n$ 是可调参数; 开环工厂系统传递函数 $G_{plant}(s)$ 在参考条件下定义。不确定性矩阵 Δ 为对角形式, $\Delta = \text{diag}[\delta_1, I_{r_1}, \dots, \delta_m, I_{r_m}]$, δ_i 是实际不确定性, I_{r_i} 是 δ_i 的重复次数。因 $G_c(s, p)$ 、 $G_s(s)$ 和 $G_{act}(s)$ 可对角化, Δ 可通过文献[18]方法确定。

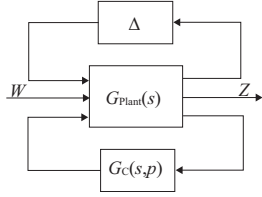


图4 LFT工厂

将要求分为软目标和硬约束,构建优化问题:

$$\text{最小化 } \delta \in \Delta \max_{i=1, \dots, n_o} \{ \|T_{\omega_i \rightarrow z_i}(G_c(s, p), \delta)\| \},$$

$$\|T_{\omega_j \rightarrow z_j}(G_c(s, p), \delta)\| \leq c, \quad j=1, \dots, n_c \quad (9)$$

式中对于每个 $\delta \in \Delta, c \in R^+, T_{w_i \rightarrow z_i}$ 为从 w_i 到 z_i 的闭环映射。符号 $\|\cdot\|$ 为 H_∞ 或 H_2 范数。

本文针对大型系统,采用动态线性近似算法,平衡性能与计算负载。算法通过自动搜索过程自适应更新,以找到问题参数的解。先分离可调参数和固定块,找到与经典 H_∞ 综合标准形式等价形式,然后将式(9)中的要求重新表述:

$$\text{最小化 } f(p, \delta), \text{ 满足 } g(p, \delta) \leq 1 \quad (10)$$

$$\text{式中 } f(p, \delta) := \max_{i=1, \dots, n_f} f_i(p, \delta), g(p, \delta) := \max_{i=1, \dots, n_g} g_i(p, \delta), \delta \in \Delta_a, f_i(p, \delta) \text{ 和 } g_i(p, \delta) \text{ 分别对应软、硬需求。}$$

n_a 和 n_f 分别为硬、软需求数量。式(10)是非线性、非凸、非光滑的,采用非光滑算法求解,目标是在每个 $\delta_i \in \Delta$ 下强制执行硬需求,同时最小化软需求的最坏情况值。具体而言,从空集开始迭代求解,约束最小化目标如下:

$$G_{p\eta}: \text{minimize } \Phi_\eta(p, \delta) := \max \{ f(p, \delta), \eta g(p, \delta) \} \quad (11)$$

η 根据约束 $g(p, \delta)$ 用二分法调整:约束违反时 η 增加,反之减少。式(10)通过求解子问题 $G_{p\eta}, \eta$ 用二分法调整。通过最小化 $\Phi_\eta(p, \delta)$, 对满足 $g(p, \delta) \leq 1$ 的 η 值序列,计算出解 p^* 。

由于所考虑的控制需求 $f_i(p, \delta)$ 和 $g_i(p, \delta)$ 是 Lipschitz 连续的,甚至是 Clarke 正则的,因此对于给定的 η ,最小化 Φ_η 的子问题通过无约束算法求解,该算法通过凸组合规则计算 Clarke 次微分 $\partial G_{p\eta}(p, \delta)$ 为

$$\partial G_{p\eta}(p, \delta) = \begin{cases} \partial f(p, \delta) & \text{if } f(p, \delta) > \eta g(p, \delta) \\ \eta \partial g(p, \delta) & \text{if } \eta g(p, \delta) > f(p, \delta) \\ \alpha \partial f(p, \delta) + (1-\alpha) \eta \partial g(p, \delta) : \alpha \in [0, 1] & \text{if } \partial f(p, \delta) = \partial g(p, \delta) \end{cases} \quad (12)$$

最终结果为硬约束相关局部最小值点。新子问题 $G_{p\eta}$ 以此前解为初始条件。调整控制器后,引入 $\delta^* \in \Delta$ 可能致性能下降,此时重启调优,将 δ^*

加入动态集合 Δ_a ,并设阈值 ε 确定退出时机。最后,用外推分析工具评估系统在 Δ_a 上的鲁棒性能。

3 实际案例应用

3.1 机械结构

研究对象为中型膨胀-压缩机。图5中AMB1为膨胀机侧,AMB2为压缩机侧。转子质量 $m = 236.97 \text{ kg}$, 长度 $L = 1.434 \text{ m}$, 最高连续转速 $n'_{\max} = 7053 \text{ r/min}$, 最高转速 $n_{\max} = 7407 \text{ r/min}$, 设计功率 $P = 2800 \text{ kW}$ 。转子偏心时,辅助滚动轴承提供最小径向间隙 $C = 210 \text{ }\mu\text{m}$ 。模型在 MATLAB 中开发,采用 WROBLEWSKI 等^[19]的方法优化不确定刚度值。

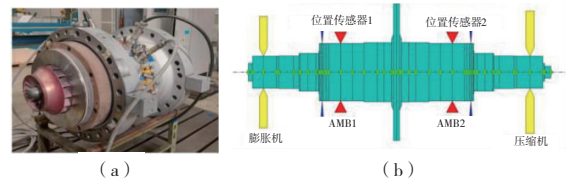


图5 转子图片及其有限元建模

1~5000 Hz 下,控制器升速时注入正弦力,记录位移。按文献[20],从 AMBs 闭环测量提取开环频率响应。图6对比测量与模拟结果。因因子刚性大,其动态影响未考虑。

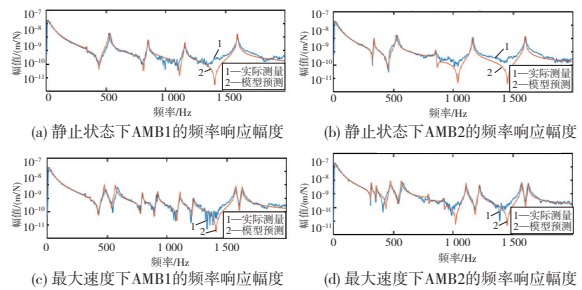


图6 转子的实测和模型预测的频率响应幅度

3.2 电气部件与控制器

电感式传感器经 3 kHz 1 阶滤波器模拟, AMBs 和放大器用 2.5 kHz 2 阶滤波器建模。两径向 AMBs 负刚度约 -10^7 N/m 。D(s) 含延迟和 23 kHz DAC 效果。

3.3 系统目标与约束

软要求是频率变化时值最小化至目标值以下;硬约束是确保要求满足。表1列出要求及目标值。操作频率内转子弯曲模式频率与测量值误

差不超过 5%,如图 6。

表 1 要求列表及数值

类型	名称	目的	值	频率区间/Hz
硬性	$g_1(p)$	内部稳定性	—	$[0, \infty)$
硬性	$g_2(p)$	敏感度函数增益/ (V/V)	3	$[0, \infty)$
硬性	$g_3(p)$	AMBs 刚度 (N/m)	2.20×10^7 (AMB1) 1.47×10^7 (AMB2)	$[0, 150\% \text{MCS}]$ $[0, 150\% \text{MCS}]$
软性	$f_1(p)$	模式阻尼	0.30	$[0, 150\% \text{MCS}]$
软性	$f_2(p)$	增强型 PID 增益 (V/V)	15	$[0, 2\ 000]$ $[2\ 000, \infty)$
软性	$f_3(p)$	稳定性裕度	25°, 2 dB	$[0, 150\% \text{MCS}]$

1) 硬约束的选定与执行

第 1 个硬约束 $g_1(p)$ 通过闭环系统状态矩阵 $A(p, \delta)$ 的谱半径 $\alpha(A)$ 满足以下不等式隐含实现:

$$\max_{\delta \in \Delta} \alpha(A(p, \delta)) < 0 \quad (13)$$

式中 $\alpha(A) = \max \{ \text{Re}(\varphi) : \varphi \text{ 为 } A(p, \delta) \text{ 的特征值} \}$, 而 $A(p, \delta)$ 为闭环系统的状态矩阵。

第 2 个硬约束 $g_2(p)$ 涉及 AMBs 对噪声最小鲁棒性。敏感度函数 $S(s)$ 定义:

$$S(s) = (I - G_p(s)G_c(s))^{-1} \quad (14)$$

为了简化, $G_p(s) = G_s(s)G_{\text{rot}}(s)G_{\text{act}}(s)$ 为植物传递函数, 而 $G_{\text{rot}}(s) = C_R(sI - A_R)^{-1}B_R$ 描述了配备 AMBs 的不稳定转子的动态行为。函数 $g_2(p, \delta)$ 定义为

$$g_2(p, \delta) = \|W_s(s)S(s, p, \delta)\|_{\infty} \quad (15)$$

$W_s(s)$ 为最大目标增益轮廓, 本例中其值为 3。

第 3 个硬约束 $g_3(p, \delta)$ 要求轴承具有最小刚度, AMB1 和 AMB2 的最小刚度分别为 $2.20 \times 10^7 \text{ N/m}$ 和 $1.47 \times 10^7 \text{ N/m}$ 。通过限制 AMBs 处柔顺函数 $K(s)$ 的增益上限来实现该约束:

$$g_3(p, \delta) = \|W_{Kl}(s)K_{lm}(s, p, \delta)\|_{\infty} \quad (16)$$

式中: $i=1, 2$; $W_{K1}(s)$ 和 $W_{K2}(s)$ 分别为两个 AMBs 的最小目标刚度的倒数; 同时, 指定了自由度 (l, m) , K_{lm} 为在这些自由度上评估的刚度函数。

2) 软约束的选择与实施

软约束与优化控制器性能相关。API-617 标准限制了因不平衡力导致的转子位移。不平衡力

与转子速度同步, 由不平衡质量引起。对于给定的转子轴 z , 在固定转子速度 Ω 下, 不平衡力表示为:

$$F_{uz} = \Omega^2 U \cos(\Omega t + \phi) \quad (17)$$

式中: ϕ 为相位角; U 为不平衡量。

第 1 个软目标 $f_1(p, \delta)$ 优化操作频率内的模式阻尼, 其值为 1 时表示满足最小阻尼要求。本研究设定最小阻尼比为 0.30 以抑制振动和限制位移。第 2 个软目标 $f_2(p)$ 最小化每个增强型 PID 控制器的增益, 以减少 AMBs 线圈电流:

$$f_2(p) = \|W_c(s)G_{ci}(s, p)\|_{\infty} \quad (18)$$

$W_c(s)$ 为最大目标增益轮廓。第 3 个软目标 $f_3(p)$ 基于经验, 关注闭环稳定性裕度, 确保鲁棒稳定性 $f_3(p)$ 定义如下:

$$f_3(p, \delta) = \|2\gamma D^{-1}S(s)D - \gamma I\|_{\infty} \quad (19)$$

式中 $S(s)$ 为敏感度函数; D 为环路缩放因子; γ 为根据增益和相位裕度计算的标量参数。本研究实现 25° 相位裕度和 2 dB 增益裕度。

3) 不确定性建模

在处理不确定性时, 转速被当作一个不确定的实数参数 δ_{Ω} 来考虑。这个不确定性的范围为

$$\delta_{\Omega} \in [0, \Omega_{\max}] \quad (20)$$

式中 $\Omega_{\max}$ 为 MCS 的 150%, 以确保机器安全运行。通过模态坐标, 引入转子弯曲模式自然频率 λ_i 的不确定性, 如下:

$$\delta_{\lambda_i} = \lambda_i(1 + \delta_i) \quad (21)$$

本研究系统对前 5 个弯曲模式引入 20 Hz 的不确定性 δ_i , 考虑模型不准确性和工厂磨损导致的动态变化。控制器参数受物理限制约束, 表 2 总结了这些初始值。

表 2 可调参数的限制与初始值

符号	参数名称	参数变化范围	参数初始值
K_{pi}	比例增益	$[0.4, 1.1]$	0.65
K_{fi}	积分增益	60	60
τ_i	1 阶滤波器零点/Hz	$[30, 200]$	35
α_i	1 阶滤波器极点/零点比率	$[0.2, 1]$	0.85
ω_{pi}	2 阶极点自然频率/Hz	$[30, 2\ 000]$	150
δ_{pi}	2 阶极点阻尼比	$[0.05, 1]$	0.70
ω_{zi}	2 阶零点自然频率/Hz	$[30, 2\ 000]$	150
δ_{zi}	2 阶零点阻尼比	$[0.05, 1]$	0.70

4 实验结果

本节展示满足要求的实验成果。调谐在 MATLAB 环境中完成,运行于 16 GB RAM、Intel i7~12 800 H (2.40 GHz) 处理器上。实验结果通过 AMBs 测量,图 7 展示了两个 AMBs 的控制器波特图,满足软性增益要求。 μ 分析显示系统稳定性裕度在所有频率下均高于 1。

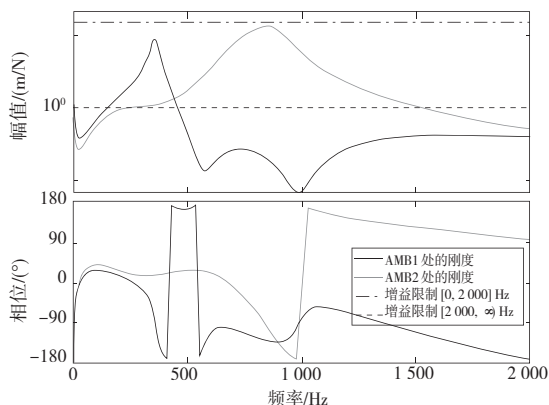


图 7 控制器传递函数波特图

图 7 获得的 AMBs 控制器频率响应,其中虚线表示表 1 中报告的控制器增益限制。

敏感度函数第 2 个硬约束如图 8 所示(本刊为黑白印刷,如有疑问请咨询作者)。

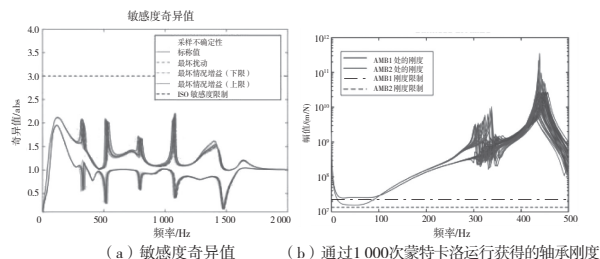


图 8

针对敏感度函数的第 2 个硬约束,图 8(a) 中的单值分析结果表明,该约束在所有频率和不确定性条件下均得到满足。图 8(b) 通过 1 000 次蒙特卡洛模拟展示了不确定参数变化下 AMBs 的刚度,结果表明第 3 个硬约束在所有频率下均满足。为验证最小阻尼,通过测试不平衡响应评估模式放大因子和最大振动幅度。转子振幅限制为 $45 \mu\text{m}$ (ISO-14839), AF 需低于 2.5 (API-617)。测试不平衡基于 $U_m = 4.5 \times 10^4 \text{ kgm}$,按照 API 规定计算。3 种测试不平衡用于验证控制器是否满足位移和 AF 限制:第 1 种在转子质心处放置 U_m ,激发第一刚体模态;第 2 种在转子两端放置相位相反的 $U_m/2$,激发第二刚体模态;第 3 种在转子中心放置 $U_m/2$,两端放置相位相反的 $U_m/4$,激发第一弯曲模态。

为了全面评估在各种模式不确定性影响下的系统性能,图 9 展示了在最具挑战性的场景下,对测试不平衡的响应。

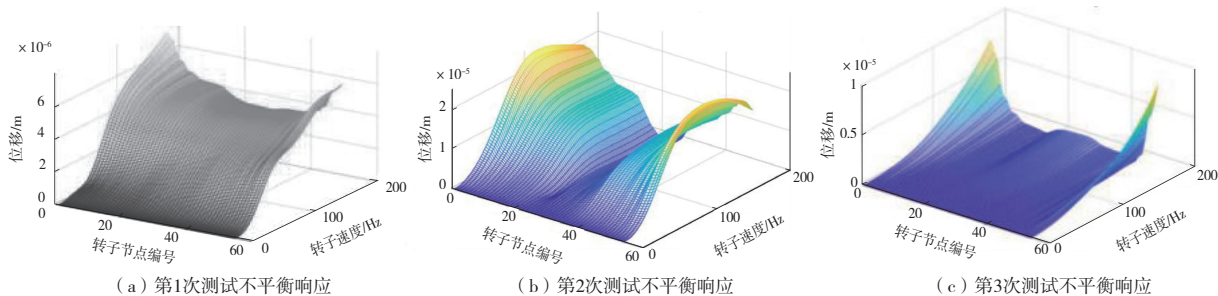


图 9 3 次不平衡响应测试

如图 9 所示第 2 次测试不平衡下最大位移符合 $45 \mu\text{m}$ 振幅限制,且 0~176 Hz 内 AF 远低于 2.5 的 API 限制。稳定性裕度在所有不确定性和频率下均满足要求,但未全部展示。如图 10 所示,真实系统测试结果表明,AMBs 处的敏感度和刚度测量符合限制且与模型预测一致,验证了自动调谐技术的有效性。控制器满足软性和硬性要求,具备适应性和鲁棒性,适用于多种场景。

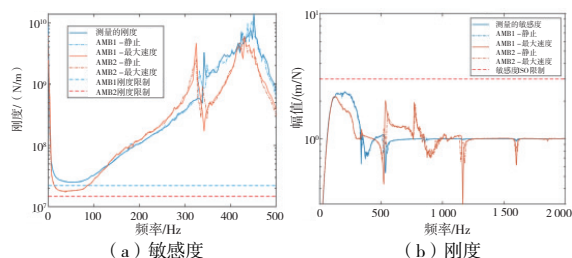


图 10 静止和最大速度下测量的 AMBs 的敏感度和刚度

5 结语

本文提出了一种针对通用涡轮机械主动磁轴承(AMBs)的增强型 PID 自动调谐技术。该技术采用非光滑优化算法,考虑建模误差带来的不确定性,以提高控制器鲁棒性。性能要求分为硬性要求和软性要求,通过系统化方法实现参数全自动调谐,特别适用于石油和天然气行业。实际应用表明:该方法适应性强,振动抑制、动态响应和鲁棒性表现优异,计算时间仅需 7 h,远低于手动调谐。该研究为磁性轴承先进控制技术提供了新思路,为工业应用奠定了基础,且可利用现有硬件实现参数自动调整。

参考文献:

- [1] 陈振炳,胡业发. 基于单纯形法的主动磁悬浮滑模控制器的参数调优[J]. 数字制造科学,2025,23(1): 27-31.
- [2] 李鸿鑫,王大朋. 鼓风机用高速磁悬浮电机设计与结构分析[J]. 微特电机,2025,53(2):14-19.
- [3] 赵科杰,张伦生. 主动式磁轴承电流均衡控制方法研究[J]. 日用电器,2025(1):124-129.
- [4] 丁翔宇,范启富. 转子圆度误差对四自由度 AMB 的稳定性影响[J]. 测控技术,2023,42(9):88-97.
- [5] 纪历,陈美豪. 基于特征模型和跟踪微分器的主动磁轴承自适应控制方法[J]. 中国机械工程,2025,36(6):1363-1370.
- [6] 厉荣宣,史忠进,陈伟. 基于深度残差网络的电机故障诊断研究[J]. 自动化仪表,2024,45(10):117-120.
- [7] 刘明星,陈大帅,张飙. 电动机选用主动磁轴承支撑的优缺点分析[J]. 电气防爆,2024(4):10-13.
- [8] 董如昊,魏志韬,邓艳. 主动磁悬浮轴承在余热发电机的应用分析[J]. 时代汽车,2023(17):16-18.
- [9] 左曙光,罗莹. 一种用于主动磁轴承不平衡补偿的切换控制法[J]. 机电产品开发与创新,2023,36(1): 92-96,103.
- [10] 刘浩,张丽丽. 基于单神经元 PID 的建筑施工主变压器状态自动控制研究[J]. 电子设计工程,2025,33(6):96-99.
- [11] 许强,卫朝阳. 基于四自由度整体控制模型的径向磁悬浮轴承预测控制[J]. 轴承,2023(7):8-12.
- [12] 龚高,梁豪. 基于有限元的主动式磁轴承极靴的影响分析[J]. 现代工业经济和信息化,2022,12(10): 250-252.
- [13] 张海燕,俞晓阳. 雨流法预测保护轴承寿命[J]. 装备制造技术,2023(5):31-34.
- [14] 向东,高向玲. 基于第二类 BFGS 割线刚度算子的几何精确梁[J/OL]. 工程力学,1-18[2026-03-07]. <https://link.cnki.net/urlid/11.2595.o3.20241125.1623.022>.
- [15] 柳伟,汪过兵. 黏弹性四参数地基上两跨连续修正 Timoshenko 梁的横向自振特性分析[J]. 振动工程学报,2025,38(3):604-611.
- [16] APKARIAN P. Tuning controllers against multiple design requirements [C]//2013 American Control Conference. Washington, DC, USA: IEEE, 2013: 3888-3893.
- [17] 李国强,余淑辉. 通信噪声条件下非光滑优化问题的分布式 derivative-free 方法[J]. 数学进展,2024,53(1):193-214.
- [18] CRUZ J, PERKINS W. A new approach to the sensitivity problem in multivariable feedback system design[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1964,9(3):216-223.
- [19] WROBLEWSKI A C, SAWICKI J T, PESCH A H. Rotor model updating and validation for an active magnetic bearing based high-speed machining spindle [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2012,134(12):122509.
- [20] DONATI G, NERI M O, MUGNAINI M, et al. Robust controller development via iterative model updating for active magnetic bearing rotor systems[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2025, 147:011025.

收稿日期:2025-04-02