

DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2026.03.047

结构参数随机变化对非线性振动发电装置发电功率及动态响应的影响研究

韩飞燕^{1,3}, 刘丽兰², 豆卫涛^{1,3}, 林坤^{1,3}, 侯一凡^{1,3}

(1. 西安航空职业技术学院 航空工程学院, 陕西 西安 710089;

2. 西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 陕西 西安 710048;

3. 陕西省航空航天紧固件技术重点实验室, 陕西 西安 710089)

摘要:以三稳态非线性振动发电装置为研究对象,将结构线弹簧的纵向位置参数 b 考虑为正态分布式随机函数,借助数值仿真方法,研究结构参数随机变化对发电功率和非线性动力学影响的规律。研究表明:线弹簧的横向位置参数 a 随机变化时发电装置仍处于双稳态振动行为中,发电功率随着方差的变化出现增大或者减小。线弹簧的纵向位置参数 b 随机变化时,发电装置从三稳态跳变到四稳态或者跳变到单稳态,发电功率变化波动较大。综合来看,线弹簧的横向位置参数 a 对发电功率和非线性动力学响应影响较小,而线弹簧的纵向位置参数 b 对发电功率和非线性动力学响应影响较大。

关键词:结构参数;非线性振动发电;正态分布;混沌;方差

中图分类号:TH135 **文献标志码:**B **文章编号:**1671-5276(2026)03-0237-06

Research on Influence of Random Structural Parameter Variations on Power Generation and Dynamic Response of Nonlinear Vibration Energy Harvesters

HAN Feiyan^{1,3}, LIU Lilan², DOU Weitao^{1,3}, LIN Kun^{1,3}, HOU Yifan^{1,3}

(1. School of aeronautical manufacturing engineering, Xi'an Aeronautical Polytechnic Institute, Xi'an 710089, China;

2. School of Mechanical and Instrumental Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

3. Shaanxi Key Laboratory of Aerospace Fastener Technology, Xi'an 710089, China)

Abstract: Taking a tri-stable nonlinear vibration energy harvester as the research object, the longitudinal position parameter b of the linear spring is considered as a normally distributed random function. Using numerical simulation, the influence of random variations in structural parameters on power generation and nonlinear dynamic behavior is investigated. The results show that when the transverse position parameter a of the linear spring varies randomly, the energy harvester remains in a bistable vibration state, and the output power either increases or decreases with changes in variance. When the longitudinal position parameter b varies randomly, the system may transition from a tri-stable state to a quad-stable or monostable state, accompanied by significant fluctuations in output power. Overall, the transverse position parameter a has a relatively minor impact on both power generation and nonlinear dynamic response, whereas the longitudinal position parameter b exerts a more substantial influence.

Keywords: structural parameters; nonlinear vibration power generation; normal distribution; chaos; variance

0 引言

低功率微机电设备的出现促进了自供能技术的发展,其中振动能量发电技术是自供能技术中的一种^[1-3]。鉴于线性振动能量发电装置工作频宽窄的弊端,基于非线性振动的非线性振动能量发电装置收到了国内外诸多学者的青睐^[4-7],主

要存在双稳态、三稳态、四稳态和五稳态等4种非线性振动行为,其中很多研究集中在双稳态振动能量发电方面。

YAN等^[8-9]利用两端的磁作用力将中间磁铁以磁悬浮式的形式浮在两个磁铁之间,中间磁铁在两端非线性磁作用力下往返振动,设计出非线性电磁发电装置,其研究成果受到了诸多学者引

基金项目:陕西省教育厅产业化培育项目(24JC047)

第一作者简介:韩飞燕(1989—),女,陕西西安人,讲师,硕士,研究方向为机电系统动力学理论及控制研究,454695553@qq.com。

通信作者简介:刘丽兰(1979—),女,陕西西安人,副教授,博士,研究方向为机电系统动力学理论及控制研究,liulilans@163.com。

用和关注。与 Yan P 的装置类似,文献[10-12]论述了利用磁悬浮方式将多个电磁装置串联起来得到了多个共振频带的叠加电磁发电装置。在悬臂梁压电发电方面,文献[13-16]针对双稳态压电悬臂梁发电装置,不考虑几何非线性和考虑几何非线性分别研究了双稳态压电悬臂梁发电装置的非线性动力学响应,从理论研究和实验研究方面给出了参数影响规律。此外,非线性振动理论也用在涡激振动能量捕获方面^[17-20],SUN 等^[21-23]分别从 3 次多项式形式的回复力、与速度成比例的非线性阻尼和两个圆柱形钝体串联等方面对 VIVACE 装置的振幅比、发电功率等方面进行了理论与实验研究,与文献[23]的 VIVACE 相比,降低了启动流速、提高了发电功率和能量转化效率。FRANZINI 等^[24]从实验的角度进行了亚临界雷诺数激励研究,研究了 5 种不同刚度弹簧对 VIVACE 装置固有频率的影响,表明在较大的质量阻尼比乘积下,弹簧刚度直接影响系统频率及锁定区域。

综上所述,现有研究虽然在非线性振动能量捕获的结构优化、参数优化和非线性动力学研究方面做了大量工作,但在非线性回复力随机变化方面的研究鲜见报道,特别是对于非线性回复力是多个参数函数的情况。此时结构参数不同,直接导致非线性系统出现不同的振动稳态数量,尤其是在参数处于临界取值条件下,微小的变化将直接影响非线性振动能量捕获系统的振动稳态数量以及发电功率大小,从而也就直接影响有效功率的捕获。

1 非线性振动发电装置力学模型及非线性振动稳态数量

1.1 力学模型

本文研究的非线性电磁式振动发电装置简图如图 1 所示。

其非线性恢复力 $F_s(y)$ 和势能函数 $U_s(y)$ 分别如下^[25]

$$F_s(y) = K_s y \left(1 - \frac{L}{\sqrt{y^2 + a^2}} \right) + K_s (y+b) \left(1 - \frac{L}{\sqrt{(y+b)^2 + c^2}} \right) + K_s (y-b) \left(1 - \frac{L}{\sqrt{(y-b)^2 + c^2}} \right) \quad (1)$$

$$U_s(y) = \frac{K_s}{2} [3y^2 - 2L(\sqrt{y^2 + a^2} + \sqrt{(y+b)^2 + c^2} + \sqrt{(y-b)^2 + c^2})] \quad (2)$$

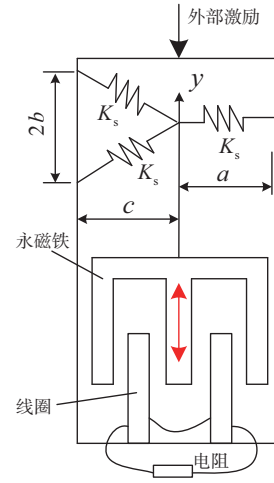


图 1 非线性电磁式振动发电装置

式中: K_s 为线性弹簧的刚度; a 、 b 和 c 分别为 3 根线性弹簧的位置参数; y 为磁铁上下振动的绝对位移; L 为弹簧松弛状态下的长度。

该发电装置的动力学方程为

$$M \ddot{y} + F_s(y) + C_d \dot{y} + B_e L_c I = F \cos(\omega t) \quad (3)$$

$$L_i \dot{I} + (R + R_c) I - B_e L_c \dot{y} = 0 \quad (4)$$

式中: M 为发电装置等效质量; C_d 为发电装置阻尼; L_c 为线圈长度; I 为线圈电流; R_c 为线圈电阻; R 为负载电阻; L_i 为线圈电感系数; B_e 为电场-磁场耦合系数; F 为激振力幅值。

由于线弹簧的横向位置参数 a 和线弹簧的纵向位置参数 b 考虑为随机变化,发电功率随时间的变化也同样呈现随机性,发电系统的输出功率采用均方根功率来表示,即

$$P = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i^2}{N}} \quad (5)$$

式中: $p_i = \frac{B_e L_c (R + R_c)}{M L_i} I_i^2$; N 为总数。

1.2 结构参数变化形式

根据文献[26]的相关分析,该非线性电磁式振动发电装置的振动稳态与其结构线弹簧的横向位置参数 a 、参数 b 和参数 c 直接相关。结构参数不同将直接影响该非线性振动发电装置的振动稳态数量发生变化。当 a 、 b 和 c 3 个参数发生变化时,1) 会现双稳态振动向左跳变到单稳态,向右跳变到三稳态;2) 三稳态向左跳变到双稳态,向右跳变到四稳态。

鉴于线弹簧的横向位置参数 a 、线弹簧的纵向位置参数 b 和参数 c 均发生变化时,所涉及的

排列组合较多,所以本文仅考虑了线弹簧的横向位置参数 a 和线弹簧的纵向位置参数 b 发生随机变化时,选取结构线弹簧的横向位置参数 a 和线弹簧的纵向位置参数 b 的临界取值。

将结构线弹簧的横向位置参数 a 和线弹簧的纵向位置参数 b 的随机变化考虑为正态分布,利用参数的方差变化来研究它们对该发电装置的发电功率和非线性振动行为(如大/小幅混沌、大/小幅周期、是/否存在跨阱运动等)的影响规律。两个参数的正态分布函数如下

$$f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp\left[-\frac{(a-\mu_a)^2}{2\sigma_a^2}\right], \quad a \sim N(\mu_a, \sigma_a^2) \quad (5)$$

$$f(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \exp\left[-\frac{(b-\mu_b)^2}{2\sigma_b^2}\right], \quad b \sim N(\mu_b, \sigma_b^2) \quad (6)$$

本文重点以三稳态的临界状态为研究对象,从三稳态振动模式方面进行研究。设定线弹簧的横向位置参数 a 和线弹簧的纵向位置参数 b 的取值为非线性振动发电系统三稳态振动模式的临界值,此时振动发电系统以三稳态振动模式工作,三稳态振动模式下研究其中一个参数方差对非线性振动发电功率和非线性动力学响应(非线性振动稳态数量变化、庞加莱映射和相轨迹图)的影响规律。

仿真分析中两个参数分布采用 σ 原则,即在动力学方程求解过程中,分别研究线弹簧的横向位置参数 a 、线弹簧的纵向位置参数 b 变化时的动力学响应和发电功率变化情况。

2 数值仿真

选择简谐激励模式,参数 c 始终保持为常数,针对三稳态典型振动行为开展研究与讨论。鉴于仿真计算数据量大,下面分别对两个参数开展仿真研究,即 1) 线弹簧的横向位置参数 a 服从正态分布时,线弹簧的纵向位置参数 b 保持为常数; 2) 线弹簧的纵向位置参数 b 服从正态分布时,线弹簧的横向位置参数 a 保持为常数。

2.1 双稳态振动模式

系统产生双稳态的临界结构参数为 $a = 0.6 \text{ m}$, $b = 0.23 \text{ m}$, $c = 0.15 \text{ m}$, 简谐激励幅值 $F = 8.3 \text{ N}$ 和频率 $\omega = 7.9 \text{ rad/s}$ 。线弹簧的横向位置参数 a 的方差取为 0^2 、 0.05^2 、 0.15^2 、 0.2^2 , 4 种方差下,发电装置的发电功率和势能函数随方差的变化如图 2 所示。

1) 线弹簧的横向位置参数 a 服从 $\mu_a + \sigma_a$ 分布
当线弹簧的横向位置参数 a 朝着大于 a 均值方向变化时,4 种方差下非线性振动发电装置的发电功率、相轨迹图、势能函数和势阱深度如图 2 所示。

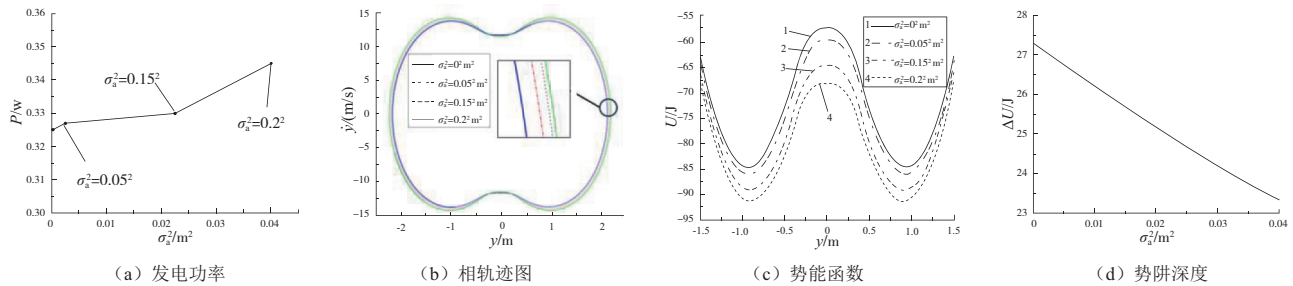


图 2 发电功率、相轨迹图、势能函数、势阱深度随方差变化关系曲线

从图 2 中可以看出,随着参数 a 方差的增大,发电功率出现小幅上升,双稳态振动模式不变,仍未单周期大幅跨间运动。势阱深度随方差的增大逐渐减小,在相同的激励条件下,势阱深度减小有利于振子振动速度的增大,发电功率出现小幅增大趋势。

综合图 2, 参数 a 的方差变化不影响双稳态振动模式,即两个平衡点和一个不稳定平衡点数量不变,仅对势阱深度有影响,对发电功率的影响

不大。由此得出如下结论:无论参数 a 在大于还是小于 a 均值范围内随机变化时,对非线性振动的稳态数量均影响不大,仅表现在发电功率的上下波动。

2) 线弹簧的纵向位置参数 b 服从 $\mu_b + \sigma_b$ 分布
当线弹簧的纵向位置参数 b 朝着大于 b 均值方向变化时,4 种方差下非线性振动发电装置的发电功率、相轨迹图和势能函数如图 3 所示。

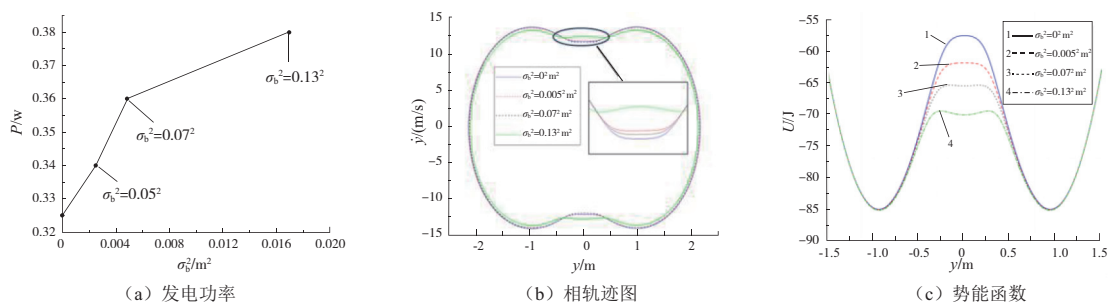


图3 发电功率、相轨迹图和势能函数随方差变化关系曲线

从图3中可以看出,随着参数 b 方差的增大,发电装置的发电功率呈现上升趋势,从0.325到0.381,增幅17%。值得注意的是,当方差为 0.07^2 时,图3(b)的势能函数曲线开始出现了三稳态振动特征,在 0.13^2 时,出现明显的三稳态振动特征,即3个稳定平衡点和2个不稳定平衡点。由此得出如下结论:参数 b 在朝着大于均值方向变化时,非线性振动发电装置的稳态数量从两个变化到了3个,微小变化不仅直接影响了振动稳态数量的变化,发电功率同时也出现了上下波动。

2.2 三稳态振动模式

1) 线弹簧的纵向位置参数 b 服从 $\mu_b - \sigma_b$ 分布

当线弹簧的纵向位置参数 b 朝着小于 b 均值方向变化时,参数 b 的方差取为 0^2 、 0.05^2 、 0.11^2 、 0.15^2 ,4种方差下非线性振动发电装置的发电功率、势能函数、庞加莱映射和相轨迹图分别如图4和图5所示。

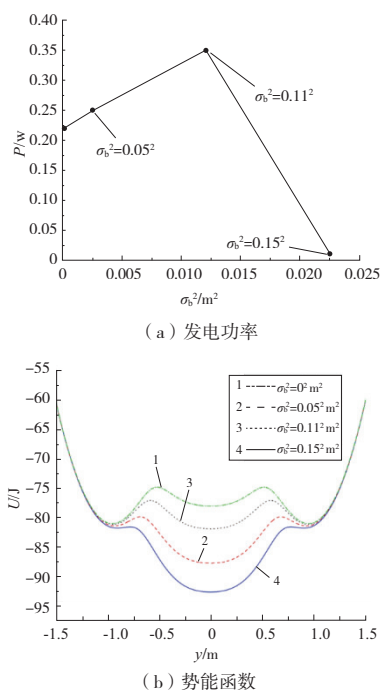


图4 发电功率和势能函数随方差变化关系曲线

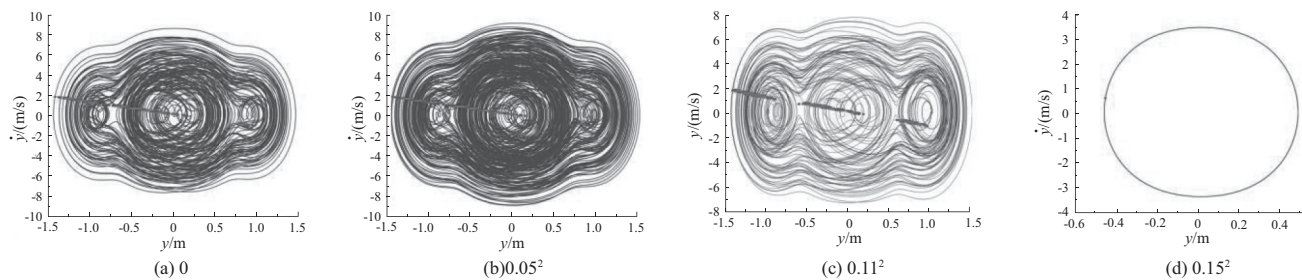


图5 相轨迹图和庞加莱映射随方差变化关系曲线

从图4可以看出:随着方差的增加,发电功率先上升后下降,在 0.11^2 位置出现最大值拐点。结合势能函数变化图来看,发电装置仍处于三稳态振动模式,中间势阱深度随着方差的增大逐渐增大,在方差为0时,中间势阱深度最小,在方差为 0.15^2 时,中间势阱深度最大。结合图5来看,0、 0.05^2 和 0.11^2 3种方差下,发电装置仍保持为三稳

态大幅混沌运动,在方差为 0.15^2 ,由于势阱深度太深,导致外界激励信号强度不足以激励发电装置,发电装置处于小幅阱内运动,此时的发电功率接近于0。

2) 线弹簧的纵向位置参数 b 服从 $\mu_b + \sigma_b$ 分布
这种情况下的方差变化关系曲线如图6所示。

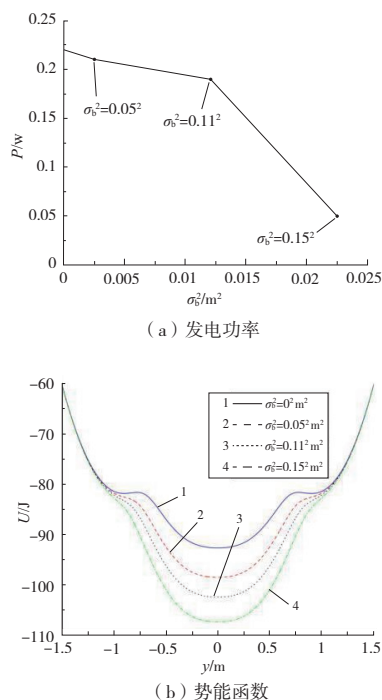


图6 发电功率和势能函数随方差变化关系曲线

从图6可以看出:随着方差的增加,发电功率逐渐减小,对比势能函数图6(b),发电装置从三稳态逐渐过渡到单稳态振动模式,结合图7来看,发电振子也从三稳态阱间的大幅混沌运动变化为双周期/单周期的单稳态小幅振动,也直接影响了发电功率大小。

三稳态振动模式中,线弹簧的纵向位置参数 b 沿着小于均值方向变化时,系统振动稳态数量保持不变,均为三稳态;当沿着大于均值方向变化

时,系统振动稳态数量由三直接变为单,且大幅混沌运动也转变为了单周期小幅运动。

3 结语

本文针对非线性振动发电装置发电功率和非线性动力学特性开展了结构参数随机影响研究,在外部简谐激励信号不变的情况下,选取双稳态和三稳态振动行为,通过数值仿真获得了结构线弹簧的横向位置参数 a 和线弹簧的纵向位置参数 b 随机变化对发电功率的影响规律,主要结论如下:

1) 双稳态振动行为中,线弹簧的横向位置参数 a 变化时,发电装置处于双稳态振动模式,线弹簧的横向位置参数 a 的方差变化仅仅影响势阱深度大小。

2) 三稳态振动行为中,线弹簧的纵向位置参数 b 朝小于均值方向变化时,发电装置的振动行为从三稳态跳变为四稳态,方差变化过程中发电功率存在极大值点;线弹簧的纵向位置参数 b 朝大于均值方向变化时,发电装置振动行为从三稳态直接跳变为单稳态,发电功率随着方差增大逐渐减小。

3) 通过对线弹簧的横向位置参数 a 和线弹簧的纵向位置参数 b 的影响规律来看,对于非线性振动发电装置来说,在外部激励不变情况下,参数 a 对发电装置非线性动力学响应影响较小,相比之下,参数 b 对发电功率和非线性动力学响应影响较大。建议严格控制线参数 b 的随机变化范围。

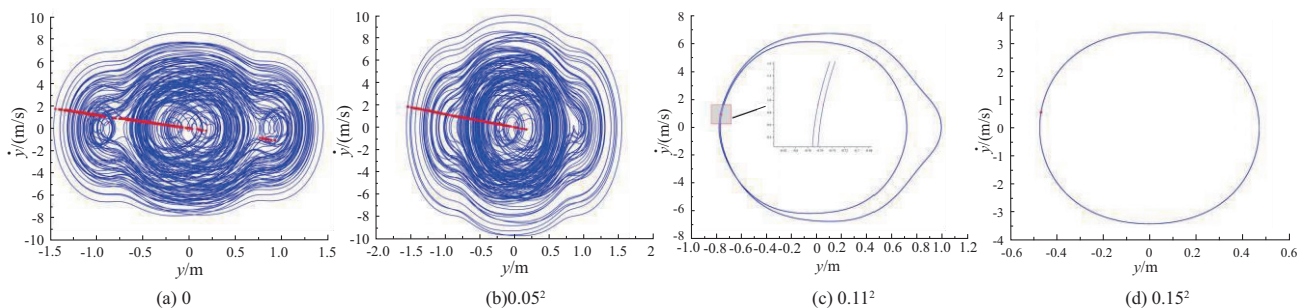


图7 相轨迹图和庞加莱映射随方差变化关系曲线

参考文献:

- [1] 闫晓东,周公博,周坪,等. 基于旋转磁力-风致振动的混合式压电振子发电性能[J]. 中国机械工程, 2025, 36(10): 2249-2257, 2265.
- [2] 刘丽兰,任航,李李佳,等. 引入非线性恢复力的涡激振动发电系统动力学行为研究[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(4): 465-482.
- [3] 路永玲,张子阳,王真,等. 基于摩擦纳米发电的无线自供能输电线振动监测系统[J]. 微纳电子技术, 2024, 61(9): 114-123.
- [4] 聂赛,杨雄,卢俊琦,等. 不同故障下水轮发电机组轴系的振动特性研究[J]. 水电能源科学, 2024, 42(4):

- 178-182,146.
- [5] SHEN J W, WAN S, FU J D, et al. A magnetic plucking frequency up-conversion piezoelectric energy harvester with nonlinear energy sink structure [J]. *Applied Energy*, 2024, 376: 124326.
- [6] 孙万泉, 张宁. 基于 MRD 的水轮发电机组轴系非线性振动控制[J]. *振动与冲击*, 2020, 39(1): 79-84.
- [7] 卢炎. 涡激振动发电振子水动力特性研究[D]. 大连: 大连海事大学, 2023.
- [8] YAN P, ZHANG G F, YI B, et al. Electromagnetic levitation and solidification of ferrosilicon alloy and resulting microstructural evolution mechanisms [J]. *Journal of Materials Research and Technology*, 2023, 24: 8296-8306.
- [9] YAN P, ZHANG G F, YANG Y D, et al. Numerical simulation of Marangoni effect on the deformation behavior and convection of electromagnetic levitated silicon droplets under static magnetic fields [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020, 163: 120489.
- [10] KIM J, KIM J. Analysis of power generation characteristics of electromagnetic suspension device under various road surface conditions using interactive analysis of Carsim-Simulink [J]. *International Journal of Automotive Technology*, 2021, 22(4): 1077-1086.
- [11] WATANABE M, ADACHI M, FUKUYAMA H. Thermophysical properties of Ni-Ti melts measured by electromagnetic levitation method using static magnetic field [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2024, 232: 125938.
- [12] 任静, 何剑. 非谐振式的电磁-摩擦复合式纳米发电机[J]. *中北大学学报(自然科学版)*, 2023, 44(4): 455-464.
- [13] FOISAL A R M, HONG C, CHUNG G S. Multi-frequency electromagnetic energy harvester using a magnetic spring cantilever [J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2012, 182: 106-113.
- [14] 孙舒, 曹树谦. 双稳态压电悬臂梁的建模及动力学分析. *物理学报*, 2012, 61(21): 95-106.
- [15] 韩研研, 曹树谦, 孙舒, 等. 考虑几何非线性时双稳态压电悬臂梁响应分析[J]. *压电与声光*, 2014, 36(1): 132-139.
- [16] 诸磊, 韩东, 徐贵力, 等. 基于柔性套管悬臂梁式压电能量采集器的实验研究[J]. *节能技术*, 2024, 42(3): 195-199.
- [17] 王家正, 孙洪源, 林海花, 等. 风浪流联合发电装置涡激振动数值模拟研究[J]. *太阳能学报*, 2024, 45(11): 545-552.
- [18] 罗竹梅, 李俊, 郭涛, 等. 低速海流能俘能装置阵列优化布置研究[J]. *太阳能学报*, 2024, 45(11): 561-569.
- [19] 宋玉泉, 谭俊哲, 袁鹏, 等. 不同刚度圆柱振子涡激振动数值模拟[J]. *中国海洋大学学报(自然科学版)*, 2024, 54(9): 133-140.
- [20] 武俊杰, 华顺明, 张学昌, 等. 水致振动压电俘能器研究现状与展望[J]. *机械工程与自动化*, 2024, 53(5): 220-223, 226.
- [21] SUN H, BERNITSAS M M. Bio-Inspired adaptive damping in hydrokinetic energy harnessing using flow-induced oscillations [J]. *Energy*, 2019, 176: 940-960.
- [22] SUN H, MA C H, BERNITSAS M M. Hydrokinetic power conversion using flow induced vibrations with cubic restoring force [J]. *Energy*, 2018, 153: 490-508.
- [23] SUN H, BERNITSAS M M, TURKOL M. Adaptive harnessing damping in hydrokinetic energy conversion by two rough tandem-cylinders using flow-induced vibrations [J]. *Renewable Energy*, 2020, 149: 828-860.
- [24] FRANZINI G R, BUNZEL L O. A numerical investigation on piezoelectric energy harvesting from vortex-induced vibrations with one and two degrees of freedom [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2018, 77: 196-212.
- [25] YANG T, CAO Q J. Dynamics and high-efficiency of a novel multi-stable energy harvesting system [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, 131: 109516.

收稿日期: 2025-05-07